

ПРИМЕНИМА ЛИ МОДЕЛЬ АБРИКОСОВА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ВИХРЕЙ В ПЛАЗМЕ?

А.В.Гордеев и С.В.Левченко

Российский научный центр "Курчатовский институт"

123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 февраля 1998 г.

Рассмотрена новая модель электронных вихрей в плазме, в которой считается заданным профиль лагранжева инварианта I , равного отношению электронной завихренности к электронной плотности $I = \Omega/n$. В предлагаемом подходе учитывается магнитный дебаевский масштаб $r_B \simeq B/4\pi en$, приводящий к нарушению квазинейтральности плазмы. Показано, что сингулярная модель Абрикосова не может быть использована для описания электронных вихрей в плазме из-за принципиальной ограниченности электронной завихренности на оси вихря в плазме. Из анализа уравнений следует, что для рассматриваемой модели электронного вихря уменьшение размера области r_0 , где $I \neq 0$, по сравнению с c/ω_{pe} (ω_{pe} – электронная плазменная частота) приводит к уменьшению полного потока магнитного поля. При $\omega_{pe}r_0/c \ll 1$ образуется электронный вихрь, где магнитный поток убывает как r_0^2 и в электронной завихренности доминирует инерционная составляющая. Возникающая при $\omega_{pe}r_0/c \Rightarrow 0$ структура представляет собой узкую "яму" электронной плотности, которая может быть идентифицирована по спектру электромагнитных волн в этой области.

PACS: 47.43.-y, 52.60.+h, 52.30.-q

1. В физике плазмы давно используется модель электронных вихрей, которая получила широкое распространение после работы Абрикосова [1]. Фундаментальность вихревой структуры связана с тем, что для завихренности

$$\Omega = \mathbf{B} - \frac{c}{e}[\nabla \times \mathbf{p}] \quad (1)$$

в отсутствие столкновений между частицами существует закон сохранения [2, 3]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = [\nabla \times [\mathbf{v} \times \Omega]]. \quad (2)$$

Видно, что при этом сохраняется интеграл $\int \Omega d^2\mathbf{r} = \text{const}$, где \mathbf{r} – вектор в плоскости, перпендикулярной направлению Ω и \mathbf{B} . Однако закон сохранения (2) утверждает нечто большее: возможность локального сохранения и перемещения завихренности в пространстве аналогично заряду и массе.

Особенно простой оказывается модель точечного вихря, введенная в электродинамику в связи со сверхпроводниками второго рода [1]:

$$\frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \Delta B - B = -A\delta(\mathbf{r}), \quad (3)$$

которая следует из (1) для $\Omega \sim \delta(\mathbf{r})$. Здесь постоянная A определяется свойствами среды. Абрикосовский вихрь стал классическим объектом и получил многочисленные экспериментальные подтверждения [4, 5].

Модель (3) часто используется для описания электронных вихрей в плазме (см., например, [6]). Расходимость магнитного поля на оси, следующая из уравнения (3),

устраняется в сверхпроводниках в силу того, что в сердцевине вихря при приближении к оси среда теряет сверхпроводящие свойства [7]. Существенно при этом, что уравнение (3) приводит к конечному потоку магнитного поля для одиночного вихря. Предположим, что уравнение (3) верно для электронных вихрей в плазме. Тогда оно также приводит к логарифмической расходимости магнитного поля на оси при условии, что плотность электронов считается равной плотности ионов. Однако экранирование полей в плазме на магнитном дебаевском размере $r_B = \Omega/4\pi en$ приводит к тому, что вблизи оси вихря на масштабе $r_0 < r_B$ нарушается квазинейтральность плазмы, что приводит к уменьшению плотности электронов и, соответственно, электронных токов. Как будет видно из дальнейшего, в плазме величина полного магнитного потока определяется размером области r_0 , где $\Omega \neq 0$, и стремится к нулю при $r_0 \Rightarrow 0$, что противоречит уравнению (3). Поэтому модель Абрикосова в плазме некорректна.

2. Простые и непротиворечивые уравнения для электронных вихрей в плазме были получены в работах [8–10]. Там было показано, что при учете малого масштаба $r_B \simeq B/4\pi en$ возможно построение корректной модели вихря в плазме. При этом обычная область применимости для вихрей

$$B^2 \ll 4\pi n_e m_e c^2 \quad (4)$$

соответствует случаю $r_B \ll c/\omega_{pe}$. Может показаться, что ввиду малости магнитного дебаевского размера учет квазинейтральности несуществен. Однако магнитный дебаевский размер вблизи оси может оказаться значительно больше размера r_0 , где $\Omega \neq 0$. Нарушение квазинейтральности в этой области приводит к резкому уменьшению электронной плотности – магнитное поле падает и его логарифмическая расходимость исчезает.

Таким образом, и в сверхпроводнике и в плазме имеется механизм, устраняющий расходимость магнитного поля на оси вихря, который определяется уменьшением числа носителей тока. Разница заключается в том, что в плазме нет внутреннего масштаба, малого по сравнению с c/ω_{pe} . При уменьшении $r_0 < c/\omega_{pe}$ происходит спад плотности и магнитного поля на оси. В результате магнитный член в завихренности оказывается малым по сравнению с инерционным. Поэтому структура вихря существенно изменяется.

Следует подчеркнуть, что общие уравнения, полученные в [8–10], справедливы и при противоположном соотношении между r_B и c/ω_{pe} , и могут быть, в частности, использованы для лазерной плазмы с очень большими значениями магнитного поля [11].

В работах [8–10] уравнения для вихрей были получены для модели релятивистских холодных электронов без столкновений. В этом приближении основное уравнение для движения электронов принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi c n} \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \boldsymbol{\Omega} \right] + \nabla \gamma m c^2 + \frac{\Omega}{4\pi n} \nabla B = -e \mathbf{E}, \quad (5)$$

где Ω – z -компонента электронной завихренности для случая магнитного поля B , направленного по z . Уравнение (5) получено в предположении, что движение электронов происходит в плоскости (x, y) . Здесь $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$, а скорость электронов \mathbf{v} равна

$$\mathbf{v} = -\frac{c}{4\pi en} [\nabla \times \mathbf{B}] + \frac{1}{4\pi en} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6)$$

Основное отличие рассматриваемой ниже модели электронных вихрей от обычно применяемой модели (3) состоит в том, что кроме уравнения (1) будет использовано уравнение Пуассона для плотности электронов

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi e(N - n), \quad (7)$$

где N – плотность ионов. Таким образом, плотность электронов n уже не является постоянной, а сама находится из уравнений.

В стационарном случае из уравнений (1) и (5) – (7) можно получить следующие уравнения для цилиндрически симметричного вихря:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left(mc^2 \frac{d\gamma}{dr} + \frac{\Omega}{4\pi n} \frac{dB}{dr} \right) = 4\pi e^2(n - N), \quad (8)$$

$$\Omega = B - \frac{mc^2}{4\pi e^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left(\frac{\gamma}{n} \frac{dB}{dr} \right). \quad (9)$$

Важным свойством этой системы уравнений является то, что из нее следует явное выражение для плотности электронов n :

$$4\pi\gamma mc^2 n + \Omega \left(G + \gamma^3 F \frac{mc}{e} \right) = G^2 + \gamma^4 F^2 \left(\frac{mc}{e} \right)^2 + 4\pi mc^2 \gamma^3 N, \quad (10)$$

где величины

$$G = B + \gamma F \frac{mc}{e}, \quad -\frac{v}{r} = F > 0,$$

удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dG}{dr} = \frac{\Omega - G}{r} - \frac{mc}{e} \gamma \frac{F}{r} - \frac{4\pi en}{c} r F, \quad (11)$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{e}{mc} \frac{\Omega - G}{\gamma^3 r} - \frac{F}{r}. \quad (12)$$

Соотношение (10) является следствием закона сохранения импульса. Из (10) следует, что при увеличении Ω плотность электронов n падает ввиду указанной выше конечности магнитного поля. Однако этим соотношением трудно пользоваться, так как условие $n \geq 0$ накладывает ограничения на величину Ω . Поэтому далее удобно ввести $I = \Omega/n$, чтобы получить положительно определенное выражение для n при любом I . Введение I имеет и более глубокий смысл: нетрудно убедиться, что I – лагранжев инвариант, то есть удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla I = 0. \quad (13)$$

Поэтому профиль I переносится вместе с электронами, сохраняя неизменность структуры вихря.

Окончательная система уравнений для расчета электронного вихря после введения безразмерной координаты $\rho = r \sqrt{4\pi e^2 N / mc^2}$ и безразмерных функций

$$\nu = \frac{n}{N}, \quad g = \frac{G}{\sqrt{4\pi N mc^2}}, \quad f = \frac{F}{\sqrt{4\pi N e^2 / m}}, \quad i = I \sqrt{N / 4\pi mc^2}$$

принимает следующий вид [8–10]:

$$\frac{dg}{d\rho} = \frac{\nu i - g}{\rho} - \frac{\gamma f}{\rho} - \nu \rho f, \quad (14)$$

$$\frac{df}{d\rho} = \frac{\nu i - g}{\rho \gamma^3} - \frac{f}{\rho}, \quad (15)$$

где безразмерная плотность электронов ν равна

$$\nu = \frac{\gamma^3 + g^2 + \gamma^4 f^2}{\gamma + i(g + \gamma^3 f)}. \quad (16)$$

3. В рамках уравнений (14)–(16) при задании профиля i можно рассчитать структуру электронного вихря. На рис. 1 для иллюстрации показан результат такого расчета для профиля $i(\rho)$ с характерным размером $\rho \sim 1$. Видно существенное уменьшение электронной плотности вблизи оси вихря, связанное с нарушением квазинейтральности.

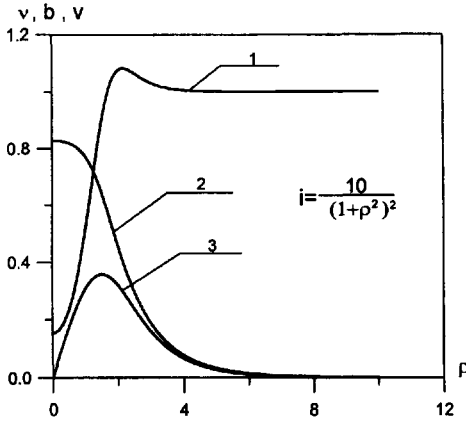


Рис.1. Структура электронного вихря в плазме для плавного профиля лагранжева инварианта: 1 – электронная плотность ν , 2 – магнитное поле b , 3 – скорость электронов v

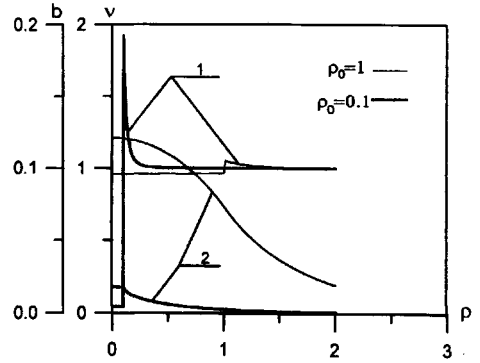


Рис.2. Изменение профиля плотности (1) и магнитного поля (2) в электронном вихре при уменьшении масштаба локализации лагранжева инварианта ρ_0

Будем уменьшать теперь размер области, где I заметно отлично от нуля, чтобы построить вихрь, максимально похожий на точечный вихрь, аналогичный (3). Для простоты выберем профиль I в виде столбика радиусом $r_0 < c/\omega_{pe}$, причем будем неограниченно увеличивать значение I в этом столбике, уменьшая радиус r_0 . Докажем, что при этом значение завихренности на оси будет ограничено.

Из (10) следует, что при увеличении Ω электронная плотность n уменьшается, так что для предельных значений Ω на оси в уравнении (10) можно пренебречь электронной плотностью по сравнению с ионной. При этом получается следующее соотношение для величин на оси вихря:

$$\Omega_0 \left(G_0 + F_0 \frac{mc}{e} \right) = G_0^2 + F_0^2 \left(\frac{mc}{e} \right)^2 + 4\pi N m c^2. \quad (17)$$

Здесь всюду положено $\gamma = 1$, а индекс 0 обозначает значение величины на оси вихря.

Кроме того, из условия постоянства F вблизи оси из уравнения (12) следует

$$\frac{e}{mc} (\Omega_0 - G_0) = F_0. \quad (18)$$

Из уравнений (17) и (18) можно найти предельное значение Ω_0 на оси:

$$\Omega_0^2 = 8\pi N m c^2 + B_0^2. \quad (19)$$

Интегрированием уравнения (9) можно получить следующее выражение для магнитного потока:

$$\int_0^{\infty} Br dr = \frac{\Omega_0 r_0^2}{2} + \frac{mc}{e} rv \Big|_{r=\infty}. \quad (20)$$

Для вычисления электронной скорости v на бесконечности воспользуемся уравнениями (11) и (12) на больших радиусах, когда можно считать $\gamma = 1$ и $n = N$. Получающееся в этом пределе уравнение для v позволяет выразить ее через функции Бесселя:

$$v = C_1 K_1(\rho) + C_2 I_1(\rho). \quad (21)$$

Ввиду необходимого граничного условия для скорости $v|_{r=\infty} = 0$ отсюда следует: $v = C_1 K_1(\rho)$. Таким образом, в уравнении (20) можно пренебречь последним членом и при учете (19) получить, что при $r_0 \Rightarrow 0$ магнитный поток убывает как r_0^2 .

На рис.2 представлены результаты расчета, показывающие изменение вихревых структур при уменьшении r_0 с соответствующим увеличением I на оси. Из приведенного рассмотрения следует, что, во-первых, структура вихрей существенно определяется их индивидуальным признаком – размером r_0 ; во-вторых, при малых $r_0 \omega_{pe}/c$ величина магнитного поля в вихре невелика. Как показывает расчет, при $r_0 \omega_{pe}/c \simeq 0.3$ отношение магнитного члена к инерционному порядка 0.1.

Значения магнитного поля и плотности на оси вихря и скорости электронов на границе области r_0 в зависимости от r_0 представлены на рис. 3.

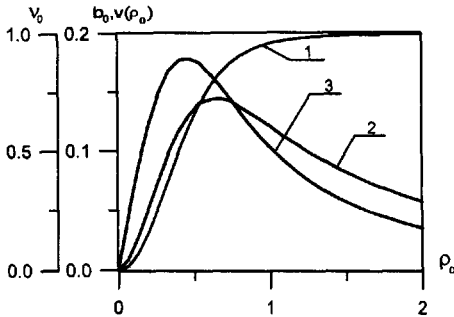


Рис.3. Зависимость плотности ν_0 (1) и магнитного поля b_0 (2) на оси вихря и скорости на наружной границе области локализации лагранжева инварианта $v(\rho_0)$ (3) в зависимости от размера области локализации ρ_0

4. Таким образом, в рассматриваемой модели при увеличении I в узкой приосевой области $r_0 < r_B = I/4\pi e$ нарушается квазинейтральность, плотность электронов падает в силу соотношения (10) и образуется "яма" электронной плотности. При этом уменьшается магнитное поле, и получается вихревая структура, где основной вклад в завихренность дает электронная инерция. Интересно, что в этой области значение $\text{rot}_z v$ конечно, хотя скорость электронов пропорциональна r_0 и поэтому исчезающе мала. Несмотря на малость магнитного потока, возникающая структура существенно отличается от вихря в незаряженной жидкости из-за наличия уравнения Пуассона.

Предельная структура вихря при $r_0 \Rightarrow 0$ практически ненаблюдаема ввиду очень малого размера "ямы" и отсутствия магнитного поля. По-видимому, единственным способом обнаружить такое образование является анализ электромагнитных волн в среде с довольно необычными свойствами: конечное Ω_0 при нулевой электронной

плотности. Для этого рассмотрим малые колебания такой среды в рамках уравнений (5),(6) и уравнения индукции

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = [\nabla \times \mathbf{E}]. \quad (22)$$

Исследование малых колебаний в области $I \neq 0$ приводит после исключения продольных плазменных колебаний к следующему дисперсионному уравнению для частоты электромагнитных волн ω в квазиклассическом приближении:

$$\nu_0^2 + \frac{\omega^2 - k^2 c^2}{\omega_{pe}^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} - 1 \right) = \frac{\nu_0}{\omega_{pe}^2} (2\omega^2 - k^2 c^2), \quad (23)$$

где k – азимутальный волновой вектор, ν_0 – отношение электронной плотности в области "ямы" к ионной плотности, $\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 N/m$. Видно, что в пределе $\nu_0 \Rightarrow 0$ в области "ямы" электромагнитные колебания приобретают в отсутствие электронов очевидный вид $\omega^2 = k^2 c^2$ в отличие от $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2$, как это должно быть в окружающей плазме [12]. Заметим, что в рассматриваемом случае $k^2 c^2 \gg \omega_{pe}^2$ ввиду $r_0^2 \omega_{pe}^2 / c^2 \ll 1$.

5. Показано, что хотя в плазме имеется механизм подавления электронных токов на оси вихря и устранение расходимости магнитного поля возможно, однако ввиду отсутствия характерного размера, определяющего сердцевину вихря, вихревые электронные структуры определяются радиусом r_0 локализации завихренности и не могут быть описаны одним универсальным уравнением (3). Более того, при $r_0 \omega_{pe} / c \ll 1$ полный магнитный поток уменьшается и структура электронного вихря существенно отличается от того, что следует из (3).

Если для сверхпроводника уравнение (3) приводит к универсальному значению магнитного потока, то для электронного вихря в плазме полный поток магнитного поля определяется величиной r_0 и не является универсальным. Поэтому уравнение (3) для электронных вихрей в плазме неприменимо. В плазме уравнение (3) должно быть заменено системой уравнений (14)–(16) при заданном профиле $i(\rho)$. При этом различные электронные вихри сохраняют свою индивидуальность, а характерный размер таких вихрей r_0 может меняться в широких пределах.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований 97-02-16980.

-
1. А.А.Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
 2. O.Buneman, Proc. Roy. Soc. (London) **A215**, 346 (1952).
 3. С.И. Брагинский, *Вопросы теории плазмы*, вып.1, М.: Атомиздат, 1963, с.183.
 4. D.Cribier, B.Jacrot, L.M. Rao, and B.Farnoux, Phys. Lett. **9**, 106 (1964).
 5. U.Essmann and H.Träuble, Phys. Lett. **A24**, 526 (1967); Phys. Stat. Sol. **20**, 95 (1967).
 6. А.С.Кингсеп, К.В. Чукбар, В.В. Яньков, *Вопросы теории плазмы*, вып.16, М.: Энергоатомиздат, 1987, с. 209.
 7. А.А.Абрикосов, *Основы теории металлов*, М.: "Наука", 1987.
 8. A.V.Gordeev, Preprint N 5928/6, Moscow, RRC "Kurchatov Institute", 1995.
 9. А.В.Гордеев, *Физика плазмы*, **23**, 108 (1997).
 10. A.V.Gordeev and S.V. Levchenko, in: 18th Symposium on Plasma Physics and Technology, Prague, June 17-20, 1997, pp. 74-76.
 11. S.V.Bulanov, M.Lontano, T.Zh. Esirkepov et al., Phys. Rev. Lett. **76**, 3562 (1996).
 12. В.Д.Шафранов, *Вопросы теории плазмы*, вып. 3, М.: Атомиздат, 1963, с.3.