

## ЭВОЛЮЦИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ В СИЛЬНО НЕРАВНОВЕСНОМ ПРОЦЕССЕ БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИИ

Ю.Каган, Б.В.Свистунов

*Российский научный центр "Курчатовский институт"*  
123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 марта 1998 г.

Обсуждается эволюция недиагональных корреляторов (на примере одночастичной матрицы плотности) в процессе бозе-конденсации изначально неравновесного взаимодействующего газа. Специальное внимание уделяется характеру затухания матрицы плотности на расстояниях, много больших размера квазиконденсатной области. В частности, показано, что экспоненциальное затухание матрицы плотности неизбежно предполагает наличие в системе хаотической вихревой структуры – клубка вихревых линий. При установлении топологического порядка, но при отсутствии недиагонального дальнего порядка, матрица плотности спадает с расстоянием по степенному закону.

PACS: 03.75.Fi, 05.30.Jp

Один из наиболее интересных аспектов кинетики бозе-конденсации связан с характером формирования квантовых корреляций и дальнего порядка в первоначально сильно неравновесной, хаотической газовой системе. Характерной особенностью последней является полное отсутствие конденсатной фазы. Предположим, что в результате быстрого охлаждения образовалась изолированная газовая система с фиксированным числом частиц  $N$  или плотностью  $n$  и характерной энергией частиц  $\epsilon_*$ , заметно меньшей, чем равновесная температура бозе-конденсации  $T_c(n)$ . Эволюция в этом случае фактически сводится к формированию потока частиц в энергетическом пространстве, переносящего в область  $\epsilon \approx 0$  частицы, образующие в равновесии бозе-конденсат. Если  $\epsilon_* \gg nU_0$  ( $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$ , где  $a$  – длина рассеяния), то на первом этапе эволюции адекватным является описание, базирующееся на больцмановском кинетическом уравнении (см. подробнее [1–4]). Легко проследить, что уже на этом этапе система проходит состояние, где числа заполнения  $n_k \gg 1$ , и это неравенство только усиливается по мере эволюции (если  $\epsilon_* \ll T_c(n)$ , то это неравенство справедливо с самого начала для всех мод с  $\epsilon_k \leq \epsilon_*$ ).

В работе [5] было показано, что при больших числах заполнения временная эволюция системы описывается статистической матрицей, диагональной в представлении когерентных состояний:

$$W(t) = \int \mathcal{D}\alpha Q(\alpha) |\Phi(t, \alpha)\rangle \langle \Phi(t, \alpha)|. \quad (1)$$

При этом когерентные состояния  $|\Phi(t, \alpha)\rangle$  являются собственными функциями полевого оператора:

$$\hat{\psi} |\Phi(t, \alpha)\rangle = \psi(t, \alpha) |\Phi(t, \alpha)\rangle, \quad (2)$$

с собственными значениями  $\psi$ , подчиняющимися нелинейному уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\Delta}{2m} \psi + V\psi + U_0 |\psi|^2 \psi \quad (3)$$

(здесь и ниже  $\hbar = 1$ ,  $V$  – внешний потенциал).

В выражении (1) проводится усреднение по начальному распределению когерентных состояний. В начальный момент времени одночастичные моды независимы, и индекс  $\alpha \equiv \{\alpha_k\}$  характеризует набор комплексных параметров  $\alpha_k = \rho_k \exp i\varphi_k$  стандартных когерентных состояний [6]. Соответственно, в (1)

$$\mathcal{D}\alpha \equiv \prod_k d(\rho_k^2) \frac{d\varphi_k}{\pi}. \quad (4)$$

Фазы гармоник в начальном состоянии полностью некоррелированы, и  $Q(\alpha)$  представляют собой гладкую функцию

$$Q(\alpha) = \prod_k Q_k(\rho_k^2). \quad (5)$$

Для фиксированного  $\alpha$  решение уравнения (3) (в однородном случае) должно отвечать начальному условию

$$\psi(0, \alpha) = \sum_k \alpha_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_k \rho_k e^{i\varphi_k + i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (6)$$

Целью настоящей работы является анализ эволюции корреляционных свойств в процессе формирования дальнего порядка. Для этого мы рассмотрим временную эволюцию одночастичной матрицы плотности.

Согласно (1), матрица плотности в однородном пространстве, усредненная по отдельному когерентному состоянию, может быть представлена в виде ( $\Omega$  – объем системы)

$$K_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r}' \langle \Phi(t, \alpha) | \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') | \Phi(t, \alpha) \rangle = \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r}' \psi^*(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t, \alpha) \psi(\mathbf{r}', t, \alpha). \quad (7)$$

Функция  $\psi(\mathbf{r}, t, \alpha)$  в (7) представляет собой решение уравнения (3). Полная матрица плотности  $K(\mathbf{r}, t)$  предполагает усреднение (7) со статистической матрицей (1).

Выражения (7), (3), (1) позволяют заключить, что для анализа корреляционных свойств достаточно найти решение уравнения (3) для разных значений  $\alpha$ . Этот результат крайне существен, поскольку после того, как частицы, образующие в конечном итоге конденсат, оказываются в энергетическом интервале  $\varepsilon_k < nU_0$  (когерентная область), кинетическое уравнение Больцмана перестает быть справедливым. Для описания эволюции мы должны пользоваться уравнением для классического поля (3). Фактически уже решение, полученное для одного репрезентативного значения  $\alpha$ , дает сравнительно полное представление об эволюции системы.

Когда основная часть будущих конденсатных частиц попадает в когерентную область, их кинетическая энергия становится меньше потенциальной энергии их взаимодействия друг с другом. При этом отдельные моды перестают быть независимыми, и на этой стадии начинают формироваться крупномасштабные квантовые корреляционные свойства. Существенно, что уравнение (3) оказывается справедливым еще в кинетической области  $\varepsilon > nU_0$ . В этом смысле оно дает единое описание, справедливое как в когерентной, так и в кинетической областях. Это предопределяет появление непрерывного потока из кинетической области в когерентную без каких-либо особенностей на границе между областями.

На начальном этапе эволюции в когерентной области оказываются большими флуктуации как фазы, так и модуля (или плотности) комплексного поля  $\psi$ . Но уже при концентрации частиц в узком энергетическом интервале  $\varepsilon_0(t) \ll nU_0$  или  $k_0(t) \ll k_c$  ( $k_c = 1/r_c = \sqrt{2mnU_0}$  – обратный корреляционный радиус) флуктуации модуля оказываются подавленными (см. [2]). Корреляционные свойства при этом фактически определяются флуктуациями фазы. В то же время, избыток энергии, который при достижении равновесной конденсации должен быть передан надконденсатной подсистеме, оказывается малым в меру слабости флуктуаций плотности:

$$\left\langle \left( \frac{\delta n}{n} \right)^2 \right\rangle \approx \left( \frac{k_0(t)}{k_c} \right)^2 \ll 1. \quad (8)$$

Это означает, в частности, что, начиная с этого этапа эволюции, надконденсатная подсистема фактически не меняет своих свойств и эффективно находится уже в равновесии. Характер сокращения интервала  $k_0(t)$  лимитируется теперь передачей энергии от неравновесных флуктуаций и топологических дефектов к этой подсистеме.

Наличие конечного интервала  $k_0(t)$ , где сосредоточены фурье-компоненты классического поля  $\psi$ , определяет пространственный масштаб областей  $r_0(t) \approx k_0^{-1}(t) \gg r_c$ , где относительные флуктуации слабы. При  $r < r_0(t)$  разность фаз у функций  $\psi$ , фигурирующих в корреляторе (7), практически исчезает и  $K_\alpha \approx n_0$  ( $n_0$  – плотность, практически совпадающая с равновесной плотностью конденсата, устанавливающейся в конце эволюции; при  $\varepsilon_* \ll T_c$  значение  $n_0$  близко к величине полной плотности  $n$ ). Усреднение со статистической матрицей (1) сохраняет этот результат. Таким образом, матрица плотности при  $r < r_0(t)$  ведет себя, как при наличии истинного бозе-конденсата. К такому же заключению можно прийти, рассматривая и более сложные корреляционные функции. Так, в [2] было показано, что в этих условиях трехчастичный коррелятор плотности (ответственный за скорость трехчастичной рекомбинации) падает в 6 раз по сравнению со своим значением в кинетической области. Но именно этот результат был предсказан ранее [8] для систем с истинным равновесным конденсатом. (Этот эффект был недавно открыт экспериментально [9].)

Таким образом, устанавливается своеобразное квазиконденсатное состояние, обладающее свойствами истинного конденсата для всех характеристик, зависящих от корреляций на расстояниях  $r < r_0(t)$ . В то же время области с  $r \gg r_0(t)$  оказываются еще некоррелированными, что означает отсутствие дальнего порядка и, соответственно, должно характеризоваться падением матрицы плотности с ростом  $r$ .

Нарушение фазовых корреляций на больших расстояниях связано с двумя причинами [7]. Первая из них обусловлена неизбежным возникновением хаотической вихревой структуры (“вихревой клубок”) в процессе эволюции неравновесной системы. Простое описание такой структуры предполагает введение пространственного масштаба  $l$ , определяющего среднее расстояние между вихревыми нитями (см., например, [10]). Взаимодействие с надконденсатными частицами приводит к уменьшению общей длины вихревых нитей в клубке и, соответственно, к росту  $l(t)$  (см. подробнее [7]). Другая причина – наличие в релаксирующей системе аномальных длинноволновых флуктуаций фазы или связанного с ними аномального распределения неравновесных длинноволновых фононов. (В [2] было показано, что при  $k \ll k_c$  коллективные возбуждения имеют Боголюбовский спектр и при отсутствии истин-

ного конденсата.) Релаксация этих фононов также связана с взаимодействием с надконденсатными частицами.

Установление дальнего порядка, в противоположность предыдущим этапам эволюции, связано уже с временными масштабами, зависящими от размера системы. Рассмотрим асимптотическое поведение матрицы плотности при  $r \gg r_0(t) \gg r_c$ . Представим "волновую функцию"  $\psi$  в форме

$$\psi = \sqrt{n_0} e^{i\chi} \quad (9)$$

и разложим разность фаз в показателе экспоненты в (7) в ряд Фурье:

$$\chi(\mathbf{r}', t, \alpha) - \chi(\mathbf{r}' + \mathbf{r}, t, \alpha) = \sum'_{k < k_0(t)} [\chi_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} (1 - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}) + \text{к.с.}]. \quad (10)$$

Штрих у знака суммы означает суммирование по половине фазового пространства. Предполагая компоненты Фурье независимыми, перепишем экспоненту в виде произведения экспонент для отдельных  $\mathbf{k}$  и разложим последнее в ряд с сохранением квадратичных членов ( $\chi_k \sim \Omega^{-1/2}$ ). После интегрирования по  $\mathbf{r}'$  в (7) получаем

$$\prod'_{k < k_0(t)} (1 - 2 |\chi_k|^2 (1 - \cos \mathbf{k}\mathbf{r})). \quad (11)$$

Возвращаясь к экспоненциальной форме, окончательно находим

$$K_\alpha(\mathbf{r}, t) = n_0 e^{-S(\mathbf{r}, t)}, \quad S(\mathbf{r}, t) = \sum_{k < k_0(t)} |\chi_k|^2 (1 - \cos \mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (12)$$

Легко непосредственно убедиться, что функция  $S(\mathbf{r}, t)$  может быть переписана в другой форме:

$$S(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \overline{[\chi(\mathbf{r}' + \mathbf{r}, t, \alpha) - \chi(\mathbf{r}', t, \alpha)]^2}, \quad (13)$$

где усреднение проводится по началу отсчета  $\mathbf{r}'$ .

Рассмотрим сначала случай, когда релаксация вихревой структуры, характеризуемая временем  $\tau_V(l)$ , происходит медленнее, чем затухание неравновесных фононов с  $k \approx l^{-1}$ , то есть соответствующее время  $\tau_\varphi(k = l^{-1}) < \tau_V(l)$ . Поскольку фононы с  $k > l^{-1}$  затухают быстрее ( $\tau_\varphi^{-1} \sim k^\nu$ ,  $\nu = 2, 1$ , см. подробнее [7]), то в областях с размером  $\sim l(t)$  устанавливается практически квазиравновесное состояние. Таким образом, характерный масштаб размера квазиконденсатных областей в этом случае  $r_0(t) \sim l(t)$ .

Разность фаз в (13) может быть записана в виде

$$(\delta\chi)_\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\mathbf{r}'} d\mathbf{r}_1 \nabla_{\mathbf{r}_1} \chi. \quad (14)$$

При  $r \gg l(t)$  контур интегрирования пересекает большое число  $N \sim r/l(t) \gg 1$  некоррелированных по фазе квазиконденсатных областей. Случайное пространственное распределение нитей в клубке и знака циркуляций на них приводит к тому, что градиенты фазы на расстояниях, больших  $l$ , оказываются некоррелированными. Принимая это во внимание, имеем

$$\overline{(\delta\chi)_\mathbf{r}^2} \approx r l \overline{(\nabla\chi)_0^2}. \quad (15)$$

Локальный коррелятор здесь  $\overline{(\nabla\chi)_0^2} \sim l^{-2}$ . В результате

$$S(\mathbf{r}, t) = \xi \frac{r}{l(t)}, \quad (16)$$

где  $\xi$  – численный коэффициент порядка 1. Таким образом, матрица плотности (12), (13) спадает экспоненциально на расстояниях  $r \gg l(t)$ . Рассматривая релаксацию вихревой структуры мы нашли ранее [7] для  $l(t)$  соотношение (с логарифмической точностью)

$$l(t) \sim \sqrt{\Gamma_0 \alpha^{1/3}} \sqrt{t}. \quad (17)$$

Здесь  $\Gamma_0 = 2\pi/m$  – квант циркуляции;  $\alpha = (n_0 U_0 / T)^{3/2}$  – безразмерный коэффициент трения, полученный в предположении, что температура надконденсатных частиц  $T \gg n_0 U_0$ . Из (16) и (17) следует, что размер квазиконденсатных областей, где  $K(\mathbf{r}, t) \approx n_0$ , растет со временем как  $\sqrt{t}$ .

Когда  $l(t)$  достигает размера системы  $L$  в результате полной релаксации вихревой структуры, зависимость  $S$  от  $r$  исчезает. Функция  $K_\alpha(\mathbf{r}, t)$ , а вместе с ней и полная матрица плотности принимают постоянное, не зависящее от  $\mathbf{r}$  значение. В результате, одновременно с топологическим порядком возникает недиагональный дальний порядок и образуется истинный бозе-конденсат.

Рассмотрим обратный предельный случай, когда вихревая структура релаксирует быстрее, чем неравновесные флуктуации регулярной фазы. Пусть в какой-то момент вихревая структура исчезает и устанавливается топологический порядок. При этом, однако, полный дальний порядок (или, что то же самое, истинный конденсат) отсутствует. Размер квазиконденсатных областей и его эволюция во времени диктуются теперь релаксацией флуктуаций регулярной фазы (то есть неравновесных длинноволновых фононов). Хотя фазовая корреляция на расстояниях  $r > r_0(t)$  по-прежнему нарушается, мы не можем, однако, использовать приведенные выше соображения относительно поведения коррелятора градиентов фазы. Эти соображения справедливы только при наличии вихревого клубка (см. ниже).

При  $k_0(t) \ll k_c$  кинетическая энергия, сосредоточенная в квазиконденсате, может быть оценена как

$$E_{kin} = \frac{n_0}{2m} \int d\mathbf{r} (\nabla\chi)^2 = \frac{n_0 \Omega}{m} \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\chi_{\mathbf{k}}|^2. \quad (18)$$

В то же время, из исходного гамильтониана имеем

$$E_{kin} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{k^2}{2m} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle \sim \frac{k_0^2(t)}{m} n_0 \Omega. \quad (19)$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{k < k_0(t)} k^2 |\chi_{\mathbf{k}}|^2 \sim \Omega k_0^5(t) |\chi_{k_0}|^2, \quad (20)$$

и сравнивая оба выражения для  $E_{kin}$ , имеем

$$|\chi_{k_0}|^2 \sim 1/\Omega k_0^3(t). \quad (21)$$

Это соотношение справедливо при произвольном  $k_0(t)$  в процессе эволюции. В то же время, релаксация флуктуаций происходит с "головой," поскольку затухание неравновесных звуковых мод подчиняется закону  $\tau_\varphi^{-1} \sim k^\nu$ ,  $\nu = 2, 1$  (см. [7]). Поэтому можно утверждать, что перестройка распределения с меньшими  $k$  не успевает произойти, и, следовательно, результат (21) предполагает, что для всех  $k < k_0(t)$

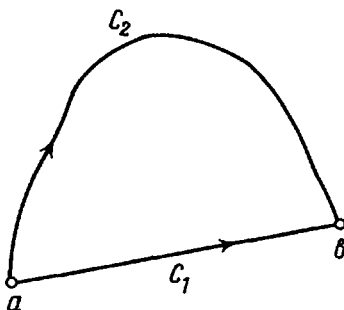
$$|\chi_k|^2 = \gamma/\Omega k^3. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (13), находим

$$S(\mathbf{r}, t) \approx 4\pi\gamma \ln(k_0(t)r) \quad (k_0(t)r \gg 1). \quad (23)$$

Сравнивая (23) с (16), видим, что опережающее появление топологического порядка существенно меняет асимптотическое поведение матрицы плотности. Недиагональный порядок наступает, когда  $r_0(t)$  достигает размера системы  $L$ . Соответствующее время установления  $\tau_\varphi \sim L^2$  в гидродинамическом режиме или  $\tau_\varphi \sim L$ , если для надконденсатных частиц имеет место кнудсеновский режим (см. [7]).

При  $\tau_\varphi \gg \tau_V$ , пока не наступил топологический порядок, поведение матрицы плотности носит более сложный характер. В этом случае релаксация фононов отстает от релаксации вихрей и размер квазиконденсатных областей  $r_0(t) \ll l(t)$  определяется флуктуациями регулярной фазы. В интервале  $r_0(t) < r < l(t)$  матрица плотности падает с расстоянием с показателем экспоненты, определяемым выражением (23). При  $r > l(t)$  закон падения резко меняется в соответствии с зависимостью (16).



Приведем в заключение два общих замечания. При выводе (12), (13) мы использовали предположение о независимости фурье-компонент разности фаз в (7). Если поведение матрицы плотности определяется флуктуациями регулярной фазы (после релаксации вихревой структуры), то разложение (10) является фактически разложением по длинноволновым фононным модам. Независимость этих мод автоматически ведет к (11), (12). При наличии вихревой структуры поведение матрицы плотности при  $r \gg l(t)$  определяется накапливающейся разностью фаз (14). Поскольку на расстояниях порядка  $l(t)$  приращение фазы  $\Delta\chi$  меняется некоррелированным образом по знаку и величине, а интегрирование по началу отсчета в (7) обеспечивает полное усреднение, мы имеем типичную марковскую картину. При  $r/l(t) \gg 1$  это приводит к гауссовому распределению для вероятности появления определенного значения разности фаз  $(\delta\chi)_r$ , что ведет непосредственно к результату (13). Это совпадение отражает тот факт, что длинноволновые флуктуации с волновыми векторами  $k$ , от-

вечающими условием  $kl(t) \ll 1$  и ответственными за поведение матрицы плотности при  $r \gg l(t)$ , являются в рассматриваемых условиях статистически независимыми.

Другое замечание связано с некоторыми общими соображениями, позволяющими понять причину разного асимптотического поведения неравновесной матрицы плотности при наличии или отсутствии вихревой структуры. Для отдельной компоненты классического поля, фигурирующей в (7), при обходе по замкнутому контуру

$$\oint \nabla \chi d\mathbf{l} = 2\pi M. \quad (24)$$

Здесь  $M$  – целое число. (Предполагаем, что контур не пересекает ни одну вихревую нить.) Рассмотрим контур, изображенный на рисунке, и пусть  $r_{ab} \gg r_0(t)$ . Если предположить, что все квазиконденсатные области независимы и  $\nabla \chi d\mathbf{l}$  имеет в этих областях произвольный знак (как следствие произвольности направления  $\nabla \chi$ ), то разность фаз

$$\chi_b - \chi_a = \int_{C_1} \nabla \chi d\mathbf{l} \approx \sqrt{r_{ab} r_0(t)} |(\nabla \chi)_0| \quad (25)$$

(см. (15)). Но если мы возьмем другой контур,  $C_2$ , с длиной  $L_{ab}$ , то

$$\chi_b - \chi_a = \int_{C_2} \nabla \chi d\mathbf{l} \approx \sqrt{L_{ab} r_0(t)} |(\nabla \chi)_0|. \quad (26)$$

При  $L_{ab} \gg r_{ab}$ , обходя по замкнутому контуру, мы заведомо получим  $2\pi M$  с  $M \neq 0$ . Это означает наличие вихревых нитей, пересекающих площадь контура. Если нет вихревых нитей, то предположение, что  $\nabla \chi$  имеет произвольное направление в отдельных квазиконденсатных областях, является ошибочным. Это означает, что исчезновение вихревой структуры оставляет неравновесную систему с ограниченным беспорядком. Это и приводит к смене асимптотического поведения матрицы плотности с (16) на (23).

- 
1. B.V.Svistunov, J. Moscow Phys. Soc. **1**, 373 (1991).
  2. Yu.Kagan, B.V.Svistunov, and G.V. Shlyapnikov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **101**, 528 (1992) [Sov. Phys. – JETP **75**, 387 (1992)].
  3. Yu.Kagan, *Kinetics of Bose-Einstein Condensate Formation in an Interacting Bose Gas, Bose-Einstein Condensation*, Eds. A.Griffin, D.W.Snoke, and S.Stringari, Cambridge University Press, 1995, p. 202.
  4. D.V.Semikoz and I.I.Tkachev, Phys. Rev. Lett. **74**, 3093 (1995); Phys. Rev. D **55**, 489 (1997).
  5. Yu.Kagan and B.V.Svistunov, Phys. Rev. Lett. **79**, 3331 (1997).
  6. R.J.Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
  7. Yu.Kagan and B.V.Svistunov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **105**, 353 (1994) [Sov. Phys. – JETP **78**, 187 (1994)].
  8. Yu.Kagan, B.V.Svistunov, and G.V.Shlyapnikov, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **42**, 169 (1985) [Sov. Phys. – JETP Lett. **42**, 209 (1985)]; Zh. Eksp. Teor. Fiz. **93**, 552 (1987) [Sov. Phys. – JETP **66**, 314 (1987)].
  9. E.A.Burt, R.W.Christ, C.J.Myatt et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 337 (1997).
  10. K.W.Schwarz, Phys. Rev. B **18**, 245 (1978).