Письма в ЖЭТФ, том 67, вып.7, стр.518 - 520

О СВЯЗИ ПРОВОДИМОСТИ И ДИФФУЗИИ ПРИ БЛУЖДАНИИ ПО САМОПОДОБНЫМ КЛАСТЕРАМ

В.Е.Архинчеев

Бурятский научный центр Сибирского отделения РАН

670047 Улан-Удэ, Россия

Поступила в редакцию 26 декабря 1997 г.

После переработки 19 февраля 1998 г.

Исследована связь между диффузией и проводимостью при блуждании частицы посредством прыжков Леви. Показано, что из-за необычного характера прыжков Леви подвижность частицы оказывается нелинейной функцией электрического поля в сколь угодно слабых полях.

PACS: 05.60.+w

1. Численное моделирование прыжков посредством прыжков Леви показало, что посещенные во время диффузии точки объединяются в кластеры, хорошо разделенные в пространстве. При более подробном рассмотрении оказывается, что каждый из кластеров, в свою очередь, состоит из совокупности кластеров. Таким образом образуется иерархическая структура из самоподобных кластеров [1]. Особенностью прыжков Леви является возможность частицы на каждом шагу смещаться на сколь угодно большие расстояния, так что среднеквадратичное смещение за единичный промежуток времени оказывается бесконечным, а функция распределения вероятности в фурье-представлении имеет вид

$$P(k,t) = \exp(-A|k|^{\mu}t), \tag{1}$$

где A и μ – положительные величины, $1 < \mu < 2$. Такие распределения называются распределениями Леви. Более подробно о прыжках Леви см. также [2].

В настоящем сообщении будет показано, что распределение Леви в электрическом поле можно представить в виде

$$P(k,t;E) = \exp(-A|k|^{\mu}t + ikVt). \tag{2}$$

При этом дрейфовая скорость оказывается нелинейной функцией электрического поля, а именно:

$$V \sim E^{(\mu-1)}. \tag{3}$$

Подчеркнем, что эта нелинейность имеет место в сколь угодно слабых полях и является следствием необычного характера диффузии. Иными словами, закон Ома (линейный отклик на поле) является следствием обычного характера диффузии, при ином характере диффузии закона Ома может не быть вообще. Этот результат можно пояснить следующим образом. Из уравнений (1) и (2) легко получить уравнение для диффузии по самоподобным кластерам в электрическом поле в виде уравнения непрерывности

$$[\partial/\partial t + (A|k|^{\mu} + ikV)]N(k,t) = 0. \tag{4}$$

Здесь $N(k,t)$ – плотность диффундирующих частиц в фурье-представлении, ток имеет диффузионную и полевую составляющие, полевой ток $J = NV$ имеет обычный вид.

Далее воспользуемся известными рассуждениями Эйнштейна. В равновесии диффузионный ток J_d компенсируется полевым J_f, а функция распределения должна иметь больцмановский вид:

$$J_d + J_f = 0, \qquad N = \exp(-U/kT), \tag{5}$$

где U – потенциальная энергия. Из (4) и (5), воспользовавшись определением для производной дробного порядка в виде ряда

$$|k|^\mu = \lim_{\epsilon\to 0}(\Delta^2+\epsilon)^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\mu(\Delta/\epsilon^n),$$

получим общее выражение для дрейфовой скорости:

$$\mathbf{V} = \exp(U/kT)\lim_{\epsilon\to 0}(\Delta^2+\epsilon)^{\mu-2/4}/\nabla\exp(-U/kT). \tag{6}$$

В однородном электрическом поле $U = -qEx$ получим результат (3).

2. Рассмотрим одномерный дискретный аналог прыжков Леви [3]. Обозначим вероятность частицы оказаться на l узле после n шагов $P_n(l)$ и распределение вероятности прыжков по длинам $f(l)$:

$$P_{n+1}(l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(l-m)P_n(m). \tag{7}$$

В качестве функции $f(l)$ выберем следующую функцию:

$$f(l) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}(\delta_{l,-b^n} + \delta_{l,b^n}), \tag{8}$$

где $\delta_{n,m}$ – символ Кронекера. Тогда структурная функция для такого случайного блуждания равна

$$\lambda = \int f(l)\exp(ikl)dl = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\cos(kb^n). \tag{9}$$

Заметим также, что структурная функция λ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\lambda(k) = a\lambda(kb).$$

Следовательно, при $k\to 0$ она должна вести себя степенным образом с показателем $\mu = \ln a/\ln b$. Неаналитическое поведение вида $|k|^\mu$ при $k\to 0$ с показателем μ можно получить посредством преобразования Меллина или с помощью формулы суммирования рядов Пуассона. Подробнее см. [3].

Введем анизотропию в случайное блуждание по самоподобным кластерам. В силу специфики прыжков Леви частица за один шаг может смещаться на любое расстояние b^n, поэтому малая анизотропия $(1+\alpha)$ с $\alpha = qEs/kT$ при смещении на малое расстояние s оказывается экспоненциально большой на больших расстояниях b^n. Поскольку на каждом шагу диффундирующая частица покидает узел, постольку сумма вероятностей движения по, W_+, и против, W_- поля, должна равняться единице: $W_+ + W_- = 1$. Отсюда получим выражения для вероятностей движения по и против поля:

$$W_\pm = (1\pm\alpha)^{b^n}/[(1+\alpha)^{b^n} + (1-\alpha)^{b^n}].$$

Следовательно, структурная функция $\lambda(k;E)$ при диффузии посредством прыжков Леви в электрическом поле равна

$$\lambda(k;E)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{-n}[\cos(kb^n)+i\sin(kb^n)(W_+-W_-)]. \qquad (10)$$

Как и при обычной диффузии, второе слагаемое при малых $k\to 0$ содержит дрейфовую скорость:

$$V=i\partial\lambda(k;E)/\partial t|_{k\to 0}=\sum_{n=0}^{\infty}(b/a)^n\times$$

$$\times\{[(1+\alpha)^{b^n}-(1-\alpha)^{b^n}]/[(1+\alpha)^{b^n}+(1-\alpha)^{b^n}]\}\cong\sum_{n=0}^{\infty}(b/a)^n\mathrm{th}(\alpha b^n), \qquad (11)$$

где $\mathrm{th}(y)$ – гиперболический тангенс. Для вычисления скорости воспользуемся формулой Пуассона:

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(n)=1/2f(0)+\int_0^{\infty}f(t)dt+2\sum_{m=1}^{\infty}f(t)\cos(2mt).$$

В нашем случае $f(t)=(b/a)^t\mathrm{th}(\alpha b^t)$. Сделав две замены $t'=t\ln b$ и $z=\exp t'$, получим для функции $f(z)$: $f(z)=z^{-\mu}\ \mathrm{th}(\alpha z)$. Следовательно, $V(E)=\alpha/2+$ $+\alpha^{(\mu-1)}[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_1^{\infty}\mathrm{th}(z)z^{-\gamma_m}dz+\int_0^{\alpha}\mathrm{th}(z)z^{-\gamma_m}dz]$, где показатель $\gamma_m=\mu+2\pi mi/\ln b$. Нетрудно видеть, что второе слагаемое в скобках мало про сравнению с первым по параметру α. Таким образом, в сколь угодно слабых электрических полях получаем для скорости нелинейную по электрическому полю зависимость (3).

3. Обсудим полученные результаты. Как неаналитическое поведение структурной функции при малых $k\to 0$, так и нелинейная зависимость скорости от электрического поля в сколь угодно слабых полях являются асимптотическими. Ранее зависимость вида (12) была предсказана в рамках феноменологического описания аномальной диффузии на перколяционных кластерах [4]. Однако попытка обнаружить эту нелинейность путем численного моделирования дрейфа на кластерах не удалась [5], поскольку само электрическое поле в искомой области полей индуцирует ловушки. Ими оказываются участки протекательных путей, направленных против электрического поля. Поэтому вопрос о нелинейной зависимости скорости от электрического поля вследствие аномального характера диффузии оставался открытым, так же как и вопрос об области применимости феноменологического подхода. В данном сообщении нелинейная зависимость скорости от электрического поля установлена для модели диффузии посредством прыжков Леви.

---

1. B.Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman, San-Francisco, 1977.
2. G.Zumofen and J.Klafter, Physica D**69**, 436 (1993); G.Zumofen and J.Klafter, Phys. Rev. E**47**, 851 (1993).
3. B.D.Hughes, M.F.Shlesinger, E.W.Montroll, Proc. Natl. Acad. Sci (USA) **78**, 3287 (1981).
4. В.Е.Архинчеев, Э.М.Баскин, Э.Г.Батыев, J. Non-cryst Sol. **90**, 21 (1987).
5. В.Е.Архинчеев, Э.М.Баскин, ЖЭТФ **100**, 292 (1991).