Письма в ЖЭТФ, том 67, вып.8, стр.543 - 547

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ В ВАКУУМ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ С ХОЛОДНЫМИ ИОНАМИ

Д.С.Дорожкина[1]*, В.Е. Семенов*

Институт прикладной физики РАН

603600 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 10 марта 1998

В рамках квазинейтрального приближения построено аналитическое решение кинетического уравнения Власова для электронов и уравнений гидродинамики для ионов в самосогласованном электрическом поле. Данное решение справедливо при конечной величине отношения массы электрона к массе иона. Оно позволяет описать расширение в вакуум ограниченного и в общем случае сферически несимметричного в пространстве сгустка бесстолкновительной плазмы с холодными ионами и произвольным начальным распределением электронов по скоростям.

PACS: 52.90.+z

Проблема расширения плазмы в вакуум давно уже привлекает внимание как астрофизиков, так и исследователей, работающих в области управляемого термоядерного синтеза (см., например, обзор [1] и цитируемую в нем литературу). В последние годы интерес к этой задаче стимулируется также интенсивно развивающимися исследованиями пылевой плазмы [2–5]. За более чем тридцатилетний период со дня публикации пионерской работы Гуревича [6] вопрос о расширении в вакуум полуограниченной бесстолкновительной плазмы был достаточно детально изучен теоретиками [6–16]. Характерная особенность данной задачи, обусловленная бесконечным запасом энергии в исходной плазме, состоит в "неограниченном" ускорении ионов вплоть до скоростей, соответствующих тепловой скорости электронов. Очевидно, что при расширении в вакуум реального ограниченного в пространстве плазменного сгустка такие большие скорости достижимы только для незначительной доли всех ионов плазмы. Основная же их часть может увеличить свою кинетическую энергию лишь на величину порядка тепловой энергии электронов в исходном плазменном образовании. Корректное описание расширения сгустка плазмы требует учета самосогласованного остывания электронов. До недавнего времени изучение этого процесса велось лишь в рамках гидродинамического описания [1]. Соответствующая кинетическая задача была поставлена и проанализирована с применением численных методов решения в работах [17, 18]. В результате численных исследований был продемонстрирован асимптотический выход процесса расширения плазмы на квазинейтральный автомодельный режим. В настоящей работе показано, что в рамках квазинейтального приближения автомодельное решение задачи о расширении в вакуум локализованного в пространстве плазменного сгустка с холодными ионами можно построить аналитически. Решение получено для произвольного начального распределения электронов по скоростям и описывает, в том числе, динамику сферически несимметричных плазменных сгустков. Таким образом, оно может быть

[1] e-mail: dorozh@appl.sci-nnov.ru

использовано в качестве базовой модели для исследования процесса расширения в вакуум достаточно произвольного плазменного образования.

Полная система уравнений, описывающая динамику плазмы в рамках рассматриваемых приближений, включает в себя

a) уравнения гидродинамики для холодных ионов:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \mathbf{u}) = 0\,, \\
&\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla_\mathbf{r})\mathbf{u} = -\frac{Ze}{M}\nabla_\mathbf{r}\varphi(\mathbf{r}, t)\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

b)кинетическое уравнение Власова для электронов:

$$
\frac{\partial f_e}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla_\mathbf{r})\, f_e + \left(\frac{e}{m}\nabla_\mathbf{r}\varphi, \nabla_\mathbf{v}\right) f_e = 0\,, \tag{2}
$$

c) условие квазинейтральности:

$$
Zn_i = n_e \equiv \int f_e(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d^\nu \mathbf{v}\,, \tag{3}
$$

где $n_i(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – концентрация и скорость движения ионов, $f_e(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ – функция распределения электронов по скоростям, $n_e(\mathbf{r}, t)$ – концентрация электронов, m, $-e$ – их масса и заряд, Z, M – зарядовое число и масса иона, $\varphi(\mathbf{r}, t)$ – потенциал электрического поля, возникающего в процессе расширения плазмы вследствие разделения зарядов, $\nu = 1, 2, 3$ соответствует размерности пространства в рассматриваемой задаче.

Широкий спектр автомодельных решений уравнений (1) – (3) может быть построен при квадратичной зависимости амбиполярного потенциала электрического поля φ от пространственных координат $\mathbf{r}$:

$$
\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{m}{2e}\sum_{k=1}^{\nu}\omega_k^2(t) x_k^2\,, \tag{4}
$$

где x_k – компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}$, а ω_k соответствует частоте гармонических колебаний одного электрона вдоль направления x_k в рассматриваемом электрическом поле. Зависимости $\omega_k(t)$ от времени находятся в ходе решения задачи.

Автомодельное решение уравнений гидродинамики (1) в поле (4) при произвольных $\omega_k(t)$ может быть представлено в виде

$$
n_i = N(\mathbf{R}) \prod_{k=1}^{\nu} \frac{l_k(0)}{l_k(t)}\,, \tag{5}
$$

$$
u_k = X_k \dot{l}_k(t)\,, \tag{6}
$$

где u_k – соответствующие компоненты гидродинамической скорости ионов $\mathbf{u}$, $\mathbf{R}$ – вектор с компонентами R_k, $X_k = x_k / l_k(t)$ – автомодельные переменные, $N(\mathbf{R})$ – произвольная функция своих аргументов, $\dot{l}_k(t) = dl_k/dt$, а функции $l_k(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$
\ddot{l}_k - \frac{Zm}{M}{\omega_k}^2(t) l_k = 0\,. \tag{7}
$$

Решение кинетического уравнения (2) также может быть представлено в виде произвольной функции F, зависящей от набора аргументов G_k:

$$f_e(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = F(\mathbf{G})\,; \quad G_k = \Omega_k^2\beta_k(t)x_k^2 + \beta_k^{-1}(t)(v_k - \Omega_k\gamma_k(t)x_k)^2, \tag{8}$$

где Ω_k – произвольные постоянные, а функции $\beta_k(t)$ и $\gamma_k(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям в обыкновенных производных:

$$\begin{aligned} \dot\beta_k(t) &= -2\Omega_k\gamma_k(t)\beta_k(t), \\ \dot\gamma_k(t) &= \Omega_k\beta_k^2(t) - \frac{\omega_k^2(t)}{\Omega_k} - \Omega_k\gamma_k^2(t) \end{aligned} \tag{9}$$

с начальными условиями $\beta_k(0) = 1$, $\gamma_k(t) = 0$.

Условие квазинейтральности (3) при использовании решений (5), (9) может быть выполнено, если принять, что

$$\beta_k(t) = l_k^2(0)/l_k^2(t). \tag{10}$$

В этом случае уравнения (7), (9), (10) образуют замкнутую систему относительно неизвестных пока функций $l_k(t)$, $\beta_k(t)$, $\gamma_k(t)$ и $\omega_k(t)$. В результате интегрирования этих уравнений для неподвижной в начальный момент времени плазмы ($\dot l_k(0) = 0$) находим:

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \sqrt{1 + \frac{Zm}{M}}\omega_k(0), \\ \beta_k(t) &= \left(1 + \frac{Zm}{M}\omega_k^2(0)t^2\right)^{-1}, \\ \Omega_k\gamma_k(t) &= \frac{Zm\omega_k^2(0)t}{M + Zm\omega_k^2(0)t^2} = \frac{u_k(x_k,t)}{x_k}, \\ \omega_k &= \omega_k(0)\beta_k(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, выражения (5), (6), (8), (10), (11) представляют собой решение рассматриваемой задачи при произвольной функции $F(\mathbf{G})$, зависящей от ν аргументов, и ν произвольных параметрах $\omega_k(0)$. Функция $N(\mathbf{R})$, описывающая динамику пространственного распределения плотности плазмы, в данном случае не может быть любой. В соответствии с условием квазинейтральности она определяется функцией F и набором параметров $\omega_k(0)$:

$$N(X_1,\ldots,X_\nu) = \int F\left(\Omega_1^2 l_1^2(0)X_1^2 + w_1^2,\ldots,\Omega_\nu^2 l_\nu^2(0)X_\nu^2 + w_\nu^2\right)\prod_{k=1}^{\nu} dw_k. \tag{12}$$

При заданном распределении электронов по скоростям параметры $\omega_k(0)$ определяют характерные масштабы начального распределения плотности плазмы вдоль соответствующих осей координат. В частности, если принять в качестве этих масштабов вторые моменты функции распределения электронов по скоростям

$$l_k^2(t) \equiv \langle x_k^2\rangle = \int\!\!\int x_k^2 f_e(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d^\nu\mathbf{v}d^\nu\mathbf{r} \Big/ \int\!\!\int f_e(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d^\nu\mathbf{v}d^\nu\mathbf{r}\,, \tag{13}$$

то связь их начальных значений с $\omega_k(0)$ представляется в виде

$$\left(1+\frac{Zm}{M}\right)\omega_k^2(0)l_k^2(0)=\langle v_k^2\rangle_0\equiv\frac{\int\int v_k^2 f_e(\mathbf{v},\mathbf{r},t=0)d^\nu\mathbf{v}d^\nu\mathbf{r}}{\int\int f_e(\mathbf{v},\mathbf{r},t=0)d^\nu\mathbf{v}d^\nu\mathbf{r}}. \tag{14}$$

Переходя к обсуждению полученных результатов, прежде всего отметим, что расширение плазмы с произвольной функцией распределения электронов происходит, как следовало ожидать, с характерной ионно- звуковой скоростью. Этот вывод следует из закона изменения масштабов локализации плотности плазмы, определенных соотношениями (13):

$$l_k^2(t)=l_k^2(0)+c_k^2t^2,\quad c_k^2=\frac{Zm}{M+Zm}\langle v_k^2\rangle_0. \tag{15}$$

По мере расширения плазмы ионы ускоряются, а электроны остывают, приобретая вместе с тем гидродинамическую скорость, совпадающую с локальным значением скорости ионов:

$$\langle v_k\rangle\equiv\int\int v_k f_e(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d^\nu\mathbf{v}d^\nu\mathbf{r}\int\int f_e(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d^\nu\mathbf{v}d^\nu\mathbf{r}=u_k(x_k,t). \tag{16}$$

Остывание электронов происходит по адиабатическому закону, то есть среднеквадратичная скорость их теплового движения вдоль каждой из осей координат уменьшается обратно пропорционально соответствующему размеру плазменного сгустка:

$$\left\langle(v_k-u_k)^2\right\rangle\equiv\frac{\int\int (v_k-u_k)^2 f_e(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d^\nu\mathbf{v}d^\nu\mathbf{r}}{\int\int f_e(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d^\nu\mathbf{v}d^\nu\mathbf{r}}\propto\frac{l_k^2(0)}{l_k^2(t)}. \tag{17}$$

При этом интегральное распределение электронов по скоростям $\phi_e(v_1^2,\ldots,v_\nu^2,t)$ в каждый момент времени будет подобно первоначальному:

$$\begin{aligned}\phi_e(v_1^2,\ldots,v_\nu^2,t)&\equiv\int f_e(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d^\nu\mathbf{r}=\\&=\prod_{k=1}^{\nu}\sqrt{\frac{Zm+M}{Zm+M\beta_1(t)}}\,\phi_0\left(\frac{Zm+M}{Zm+M\beta_1(t)}v_1^2,\ldots,\frac{Zm+M}{Zm+M\beta_\nu(t)}v_\nu^2\right).\end{aligned} \tag{18}$$

То же самое можно утверждать относительно формирующегося по мере расширения плазмы интегрального распределения ионов по скоростям – оно также оказывается подобным $\phi_0=\phi_e(v_1^2,\ldots,v_\nu^2,t=0)$:

$$\begin{aligned}\phi_i(v_1^2,\ldots,v_\nu^2,t)&\equiv\int f_i(\mathbf{v},\mathbf{r},t)d^\nu\mathbf{r}=\\&=\prod_{k=1}^{\nu}\sqrt{\frac{Zm+M}{Zm(1-\beta_1(t))}}\,\phi_0\left(\frac{Zm+M}{Zm(1-\beta_1(t))}v_1^2,\ldots,\frac{Zm+M}{Zm(1-\beta_\nu(t))}v_\nu^2\right),\end{aligned} \tag{19}$$

где $f_i(\mathbf{v},\mathbf{r},t)=n_i(\mathbf{r},t)\delta(\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{r},t))$ – функция распределения ионов по скоростям. Таким образом, в процессе расширения локализованного в пространстве плазменного сгустка не происходит неограниченного ускорения ионов, характерного для изученного ранее случая расширения полуограниченной плазмы.

Построенное выше решение соответствует наличию в пространстве однородной плотности электрического заряда, пропорциональной значению $\sum_{k=1}^{\nu}\omega_k^2(t)$. Это означает, что используемая модель квазинейтрального расширения плазменного сгустка является, вообще говоря, некорректной в областях малой концентрации плазмы. Поэтому найденное решение не может претендовать на абсолютно точное описание процесса расширения плазмы в вакуум.

Следует, однако, отметить, что для достаточно плотной плазмы, в которой частота ленгмюровских колебаний ω_p намного превосходит значения характерных частот ω_k, то есть выполняется неравенство:

$$\omega_p^2 >> \sum_{k=1}^{\nu}\frac{\left\langle (v_k - u_k)^2 \right\rangle}{l_k^2}, \tag{20}$$

условие квазинейтральности нарушается лишь на периферии плазменного образования, на большом удалении от области локализации основной плазмы. Заметим, что в рамках найденного решения вследствие остывания электронов правая часть соотношения (20) убывает с течением времени быстрее, чем плотность плазмы. Следовательно, корректность квазинейтрального описания процесса расширения плазменного сгустка не нарушается в области его локализации с течением времени. Данное обстоятельство позволяет рассчитывать на то, что построенное в настоящей работе решение может достаточно адекватно описывать реальную ситуацию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 98-02-17052.

---

1. Ch.Sack and H.Schamel, Phys. Rep. **156**, 311 (1987).
2. M.Y.Yu and H.Luo, Phys. Lett. **A161**, 506 (1992).
3. H.Luo and M.Y.Yu, Phys. Fluids **B4**, 1122 (1992).
4. H.Luo and M.Y.Yu, Phys. Fluids **B4**, 3066 (1992).
5. M.Y.Yu and H.Luo, Phys. Plasmas **3**, 591 (1995).
6. А.В.Гуревич, Л.В.Парийская, Л.П.Питаевский, ЖЭТФ **49**, 647 (1965).
7. L.M.Wickens, J.E.Allen, and P.T.Rumsby, Phys. Rev. Lett. **41**, 243(1978).
8. B.Bezzerides, D.W.Forslund, and E.L.Lindman, Phys. Fluids **21**, 2179 (1978).
9. P.Mora and R.Pellat, Phys. Fluids **22**, 2300 (1979).
10. A.Gurevich, D.Anderson, and H. Wilhelmsson, Phys. Rev. Lett. **42**, 769 (1979).
11. А.В.Гуревич, Л.П.Питаевский, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. Леонтовича М.А., вып. 10, М.: Атомиздат, 1980.
12. А.В.Гуревич, А.П.Мещеркин, ЖЭТФ **80**, 1810 (1981).
13. А.В.Гуревич, А.П.Мещеркин, ЖЭТФ **81**, 1295 (1981).
14. Ch.Sack and H.Schamel, Plasma Phys. Controlled Fusion **27**, 717, (1985).
15. M.K.Srivastava, S.V.Lawande, and B.K.Sinha, Plasma Phys. Controlled Fusion **32**, 359 (1990).
16. Y.El-Zein, A.Amin, H.S.Kim et al., Phys. Plasmas **2**, 1073 (1995).
17. G. Manfredi, S. Mola, and M.R. Feix, Phys. Fluids **B5**, 388 (1993).
18. L.G. Garcia, J. Goedert, H.Figua et al., Phys. Plasmas **4**, 4240 (1997).