Письма в ЖЭТФ, том 67, вып.8, стр.586 - 591

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О СВЯЗИ СПИНА СО СТАТИСТИКОЙ НА НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

М.А.Соловьев[1)]

Физический институт им П.Н.Лебедева РАН

117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 марта 1998 г.

Предложен новый, более общий вывод связи спина со статистикой, применимый к нелокальным квантовым полям с произвольно сингулярным ультрафиолетовым поведением. Он основан на использовании понятия аналитического волнового фронта распределения и позволяет точно охарактеризовать допустимую степень нарушения локальности, при которой в теории существует преобразование Клейна, приводящее поля к нормальным перестановочным соотношениям.

PACS: 02.30.Sa, 03.70.+k, 11.10.Cd, 11.30.Cp,

1. Введение. Условие локальности играет центральную роль при выводе наблюдаемой на опыте связи спина со статистикой из основных предположений квантовой теории поля [1, 2]. Как отмечал еще Паули [3], при отказе от него становится допустимым квантование скалярного поля с помощью соотношения $[\varphi(x_1), \varphi(x_2)]_+ = \Delta^{(1)}(x_1 - x_2)$, где $\Delta^{(1)}$ – четное решение свободного уравнения, имеющее экспоненциальное убывание $\sim \exp(-m|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ на пространственной бесконечности. Это не означает, однако, что для нормальной связи спина со статистикой необходима строгая локальная коммутативность. Цель данной статьи – показать, что допустимую степень нарушения локальности, при которой сохраняется эта связь, можно охарактеризовать с помощью понятия волнового фронта распределения, введенного в математику сравнительно недавно и ставшего центральным при спектральном анализе особенностей в современной теории дифференциальных уравнений [4]. Коротко говоря, будет доказано, что аномальные перестановочные соотношения невозможны, если коммутаторы и антикоммутаторы полей убывают при пространственноподобном разделении аргументов быстрее любой линейной экспоненты. Поскольку квантовые поля являются сингулярными (обобщенными) фукциями координат пространства-времени, это свойство убывания нуждается в точном определении, которое дано ниже.

Мы не накладываем на сингулярность поля никаких ограничений и допускаем, что в теорию могут входить нелокальные выражения типа рядов по производным δ-функции всех порядков. Соответственно, не обязаны соблюдаться высокоэнергетические ограничения на поведение вакуумных средних, установленные исходя из микропричинности [5, 6]. Квантовая теория высокосингулярных взаимодействий является наиболее разработанным направлением нелокальной теории поля и имеет интересные связи с теорией струн, см. [7, 8]. Как показано в [9], обычный вывод связи спина со статистикой, использующий аналитические свойства вакуумных средних в x-пространстве, сохраняет силу при умеренной нелокальности, соответствующей экспоненциальному росту в импульсном пространстве. Случай более высокой сингулярности, когда область аналитичности пуста, был рассмотрен в [10, 11],

[1)] e-mail: soloviev@td.lpi.ac.ru

где обобщение теоремы о спине и статистике связано с построением оболочек голоморфности в p-пространстве. Мы покажем, что привлечение понятия волнового фронта распределения дает альтернативное и полное решение проблемы.

В техническом отношении отсутствие высокоэнергетических ограничений означает, что фурье-образы пробных функций, с которыми усредняются поля, должны принадлежать пространству Шварца $\mathcal{D}$ гладких функций с компактным носителем. В координатном представлении они являются целыми аналитическими функциями со свойством

$$|f(z)| \le C_N\,(1+|x|)^{-N}\,e^{b|y|}, \tag{1}$$

где $N = 1, 2, \ldots$, а положительные константы C_N, b зависят от f. Пространство функций, удовлетворяющих неравенствам (1) при фиксированном b, обозначается через $S^{0,b}$, а для объединения $\bigcup_{b>0} S^{0,b}$, которое есть ни что иное, как $\tilde{\mathcal{D}}$, в нелокальной теории поля принято обозначение S^0. Наряду с $S^0(\mathbf{R}^n)$, мы будем использовать родственные пространства, соответствующие конусам в $\mathbf{R}^n$. Если U - открытый конус, то $S^0(U)$ определяется неравенством

$$|f(z)| \le C_N\,(1+|x|)^{-N}\,e^{b|y|+bd(x,U)}, \tag{2}$$

где $d(\cdot, U)$ – расстояние от точки до U. Если K – замкнутый конус, то

$$S^0(K) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{U \supset K\setminus\{0\}} S^0(U). \tag{3}$$

Как обычно, сопряженные пространства обозначаем штрихом. Замкнутый конус K называется несущим конусом обобщенной функции $w \in S'^0$, если w допускает линейное непрерывное продолжение на пространство $S^0(K)$, то есть если $w \in S'^0(K)$. Мы отсылаем к [8, 12] относительно обоснования этого определения. Здесь отметим только, что если w – обычная функция, убывающая в дополнительном конусе $\mathbf{R}^n \setminus K$ быстрее, чем линейная экспонента, и имеющая не выше, чем степенной рост в остальных направлениях, то конус K для нее несущий. Условие $w \in S'^0(K)$ фактически представляет собой правильное обобщение этого свойства убывания на случай произвольной сингулярности.

2. Асимптотическая коммутативность. Мы будем рассматривать теорию конечного числа полей $\varphi, \psi, \ldots$, являющихся операторнозначными обобщенными функциями над пространством $S^0(\mathbf{R}^4)$ и преобразующихся по конечномерным представлениям собственной группы Лоренца $L_+^\uparrow$ или ее накрывающей $SL(2, \mathbf{C})$. Считаем выполненными все обычные предположения общей теории квантованных полей [1, 2], за исключением локальности. Общую инвариантную область определения полей в гильбертовом пространстве состояний обозначаем через D, а вакуум через Ψ_0. Лоренцевы компоненты φ_j, ψ_k называем асимптотически коммутирующими (антикоммутирующими) при пространственноподобном разделении аргументов, если при любых $\Phi, \Psi \in D$ матричный элемент $\langle \Phi,\ [\varphi_j(x_1), \psi_k(x_2)]_{\substack{-\\(+)}} \Psi\rangle$ имеет несущим конус $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 : (x_1 - x_2)^2 \ge 0\}$. Аксиому локальности заменяем условием асимптотической коммутативности, которое означает, что любые две полевые компоненты либо асимптотически коммутируют, либо асимптотически антикоммутируют. Как обычно, считаем, что знак – или + в этом условии зависит лишь от типа поля, но не от лоренцевых компонент, поэтому лоренцевы индексы j, k в дальнейшем опускаем.

3. Обобщение теоремы о связи спина со статистикой. Первым шагом в стандартной схеме вывода этой теоремы [1, 2] является доказательство того факта, что если поле φ имеет разные перестановочные соотношения с ψ и ψ^*, то либо $\varphi(x)\Psi_0 = 0$, либо $\psi(x)\Psi_0 = 0$. Оно прямо переносится на нелокальные поля, поскольку основано на слабом кластерном свойстве вакуумных средних, которое вытекает из существования и единственности вакуума без использования аксиомы локальности (см. [2], раздел 7.2.Б). Вторым шагом устанавливается, что аномальное перестановочное соотношение между φ и сопряженной величиной φ^* ведет к равенству $\varphi(x)\Psi_0 = 0$. Этот шаг использует свойства аналитичности вакуумных средних в x-пространстве и именно в его обобщении главная трудность.

Будем для определенности считать, что φ – нелокальное поле с целым спином и воспользуемся обозначениями

$$W(x_1 - x_2) = \langle\Psi_0, \varphi(x_1)\varphi^*(x_2)\Psi_0\rangle, \qquad W^{\mathrm{tr}}(x_1 - x_2) = \langle\Psi_0, \varphi^*(x_1)\varphi(x_2)\Psi_0\rangle. \tag{4}$$

Аномальное асимптотическое перестановочное соотношение означает, что

$$W(\xi) + W^{\mathrm{tr}}(-\xi) \in S'^{0}(\bar{V}), \tag{5}$$

где $\bar{V}$ – замкнутый световой конус. Регуляризуем ультрафиолетовое поведение умножением $\tilde{W}(p)$ на режущий фактор $h(p^2/M^2)$, где $h \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ и $h(t) = 1$ при $|t| \le 1$. Регуляризованное вакуумное среднее W_M является лоренц-ковариантным распределением умеренного роста и к нему применима теорема Баргмана – Холла – Вайтмана (БХВ-теорема), согласно которой $W_M(\xi) = W_M(-\xi)$ при $\xi^2 < 0$. Следовательно, разность $T_M \stackrel{\mathrm{def}}{=} W_M(\xi) - W_M(-\xi)$ допускает непрерывное продолжение на пространство $S^0(\bar{V})$, которое можно задать формулой $(\hat{T}_M, f) = (T_M, \chi f)$, где χ – мультипликатор в пространстве Шварца S, тождественно равный 1 в ϵ-окрестности $\bar{V}$. Важно, что эти продолжения согласованы друг с другом, а именно:

$$\hat{T}_M | S^{0,b}(U) = \hat{T}_{M'} | S^{0,b}(U), \tag{6}$$

если $U \supset \bar{V}\backslash\{0\}$ и M, M' достаточно велики по сравнению с b. Действительно, $(W_M, g) = (W, g)$ для $g \in S^{0,M}$, поскольку тогда $\mathrm{supp}\,\tilde{g}$ содержится в шаре с радиусом M. При $M > 8neb$, согласно теореме 5 в [13], пространство $S^{0,M}$ плотно в $S^{0,b}(U)$ по топологии $S^{0,M}(U)$, откуда и следует (6). Таким образом, и нерегуляризованная разность $W(\xi) - W(-\xi)$ допускает непрерывное продолжение на $S^0(\bar{V})$, что позволяет переписать формулу (5) следующим образом:

$$W(\xi) + W^{\mathrm{tr}}(\xi) \in S'^{0}(\bar{V}). \tag{7}$$

Но это совместно со спектральным условием $\mathrm{supp}(\tilde{W} + \tilde{W}^{\mathrm{tr}}) \subset \bar{V}^+$ лишь в том случае, если

$$W(\xi) + W^{\mathrm{tr}}(\xi) \equiv 0, \tag{8}$$

поскольку справедлива следующая теорема.

Теорема единственности. Если носитель распределения $u \in \mathcal{D}'$ содержится в остром конусе, а несущий конус его фурье-образа отличен от $\mathbf{R}^n$, то u тождественно равно нулю.

Доказательство этой теоремы изложим в следующем разделе статьи, а сейчас отметим, что в локальной теории распределения $\bar{W}$, $\bar{W}^{tr}$ имеют (обратное) преобразование Лапласа, в область аналитичности которого входят вещественные пространственноподобные точки, и исчезновение суммы $W + W^{tr}$ в этих точках влечет тождественное равенство ее нулю в силу единственности аналитического продолжения. Наша теорема показывает, что не только обращение в нуль при $\xi^2 < 0$, но и убывание $W + W^{tr}$ в пространственноподобных направлениях быстрее линейной экспоненты несовместно с положительностью энергии-импульса. После усреднения с пробной функцией вида $\bar{f}(x_1)f(x_2)$ формула (8) переходит в равенство $\|\varphi^*(f)\Psi_0\|^2 + \|\varphi(f)\Psi_0\|^2 = 0$ и влечет $\varphi(x)\Psi_0 = 0$ ввиду произвольности f. Более того, как следствие, равны нулю любые вакуумные средние, содержащие хотя бы один оператор φ. Пусть, например, φ стоит на предпоследнем месте. Рассматриваемое в относительных координатах $\xi_j = x_j - x_{j+1}$ вакуумное среднее $\langle\Psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}\varphi\psi_n\Psi_0\rangle$ имеет спектр в остром конусе $\bar{V}^+ \times \dots \times \bar{V}^+$ и совпадает с обобщеннной функцией $\langle\Psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}[\varphi, \psi_n]_\mp\Psi_0\rangle \in S'^0(\mathbf{R}^{4(n-1)} \times \bar{V})$. Значит, оно равно нулю снова в силу теоремы единственности. Далее применяем индукцию.

Если φ имеет полуцелый спин, то эти же соображения запрещают аномальное соотношение $W(\xi) - W^{tr}(-\xi) \in S'^0(\bar{V})$, поскольку в этом случае из БХВ-теоремы следует $W(\xi) + W(-\xi) \in S'^0(\bar{V})$, что опять приводит к равенству (8). Дальнейший анализ перестановочных соотношений между разными полями в теории с конечным числом конечнокомпонентных полей производится обычным образом. В итоге можно утверждать, что условие асимптотической коммутативности обеспечивает существование преобразования Клейна, переводящего первоначальный набор полей в новый набор, обладающий нормальной связью спина со статистикой, когда поля с целым спином асимптотически коммутируют со всеми остальными полями при пространственноподобном разделении аргументов, а поля с полуцелым спином асимптотически антикоммутируют друг с другом.

4. Доказательство теоремы единственности. Фактически мы получим более сильный результат, из которого нужное утверждение вытекает как следствие. Именно, аналогичная теорема единственности справедлива и для более широкого класса обобщенных функций, называемых ультрараспределениями и определенных на пространствах Гельфанда–Шилова S_0^α, $\alpha > 1$. Фурье-двойственное к S_0^α пространство обозначается через S_α^0. Пространство $S_\alpha^0(U)$, где U – открытый конус, задается аналогичной (2) формулой с заменой $(1 + |x|)^{-N}$ на $\exp(-|x/a|^{1/\alpha})$ и представляет собой объединение нормированных пространств $S_{\alpha,a}^{0,b}(U)$ по $a > 0$, $b > 0$. Соответствующие замкнутым конусам пространства $S_\alpha^0(K)$ обладают более хорошими топологическими свойствами, чем $S^0(K)$, и для сопряженных к ним пространств легко устанавливается [14] равенство

$$S_\alpha'^0\Big(\bigcup_{j=1}^{n} K_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} S_\alpha'^0(K_j). \tag{9}$$

Кроме того, как показано в [13], если конус K острый (это равносильно тому, что внутренность сопряженного ему конуса $K^* = \{q : qx \geq 0, \forall x \in K\}$ непуста), то $w \in S_\alpha'^0(K)$ имеет преобразование Лапласа $(w, e^{i(p+iq)x})$, аналитическое в области $\mathbf{R}^n + i(\operatorname{int} K^*)$, причем фурье-образ w является его граничным значением при $q \to 0$, $q \in \operatorname{int} K^*$.

Пусть $u \in S_0'^{\alpha}$. Напомним [4], что аналитический волновой фронт $WF_A(u)$ состоит из пар (p, ξ), где p пробегает множество тех точек, где u не является аналитической функцией, а ξ – конус тех направлений "плохого" поведения $\tilde{u}$, которые ответственны за появление сингулярности в точке p.

Лемма. Если $u \in S_0'^{\alpha}$ и $\tilde{u} \in S_\alpha'^0(K)$, то $WF_A(u) \subset \mathbf{R}^n \times K$.

Действительно, покроем K конечным числом замкнутых острых выпуклых конусов K_j и произведем разложение $\tilde{u} = \sum w_j$, $w_j \in S_\alpha'^0(K_j)$ по формуле (9). Затем выполним (обратное) преобразование Лапласа каждого w_j. Тогда u будет представлено в виде суммы граничных значений аналитических функций из областей $\mathbf{R}^n + i(\operatorname{int} K_j^*)$ и, согласно теореме 9.3.3 в [4],

$$WF_A(u) \subset \mathbf{R}^n \times \bigcup_{j=1}^{n} K_j^{**}. \tag{10}$$

Благодаря замкнутости и выпуклости $K_j^{**} = K_j$. Измельчая и стягивая покрытие к K, получаем указанное включение.

Приступим к доказательству теоремы единственности. Пусть $u \in S_0'^{\alpha}$ и $\operatorname{supp} u \subset \subset V$, где V – острый конус. Если носитель u содержит точку 0, то любой вектор $\xi \in -V^*$ служит внешней нормалью к $\operatorname{supp} u$ в этой точке. По теореме Касивары (см. [4], теорема 9.6.6), все ненулевые элементы линейной оболочки множества нормалей содержатся в $WF_A(u)_0$. Поскольку $\operatorname{int} V^* \neq \emptyset$, эта оболочка покрывает $\mathbf{R}^n$. Значит, в силу леммы, $\tilde{u} \notin S_\alpha'^0(K)$ при $K \neq \mathbf{R}^n$, то есть лишь $\mathbf{R}^n$ может быть несущим конусом $\tilde{u}$. Пусть теперь $0 \notin \operatorname{supp} u$. Допустим, что $\tilde{u} \in S_\alpha'^0(U)$, где $\bar{U} \neq \mathbf{R}^n$, обозначим через $\|\cdot\|_{U,a,b}$ норму сопряженного к $S_{\alpha,a}^{0,b}(U)$ банахова пространства и составим ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu u_\nu$, где $u_\nu(p) = u(\nu p)$. Если

$$0 < a_\nu < 1 \Big/ \left(\nu^2 \|\tilde{u}_\nu\|_{U,\nu,\nu}\right), \tag{11}$$

то ряд $\sum a_\nu \tilde{u}_\nu$ сходится в $S_\alpha'^0(U)$ и тем более ряд $\sum a_\nu u_\nu$ сходится в $S_0'^{\alpha}$. Его сумму обозначим через $\mathcal{U}$. Коэффициенты a_ν нетрудно выбрать так, что носитель $\mathcal{U}$ будет содержать точку 0. Действительно, пусть расстояние от $\operatorname{supp} u$ до 0 равно 1, и пусть p_0 – ближайшая к 0 точка $\operatorname{supp} u$. Для каждого $\mu = 1, 2, \ldots$ выберем пробную функцию $g_\mu \in S_0^\alpha$ с носителем в шаре $|p - p_0/\mu| < (1/2)(1/\mu - 1/(\mu+1))$ такую, что $(u_\mu, g_\mu) = 1$. Отметим, что $(u_\nu, g_\mu) = 0$ при $\nu < \mu$. Зададим коэффициенты a_ν последовательно, накладывая помимо (11) условия $a_\nu |(u_\nu, g_\mu)| \leq a_\mu / 2^\nu$ при $\mu < \nu$. Тогда для каждого μ

$$(\mathcal{U}, g_\mu) = a_\mu + \sum_{\nu > \mu} a_\nu (u_\nu, g_\mu) \neq 0,$$

поскольку $\sum_{\nu > \mu} a_\mu / 2^\nu \leq a_\mu / 2$. Тем самым $0 \in \operatorname{supp} \mathcal{U}$ и мы вернулись к уже рассмотренной ситуации, что завершает доказательство.

5. Заключительные замечания. Установленная в разд. 4 связь между аналитическим волновым фронтом (ультра)распределения и несущим конусом его преобразования Фурье позволяет по-новому подойти и к другим проблемам теории нелокальных взаимодействий, включая распространение на них CPT-теоремы, расширение классов эквивалентности Борхерса, построение суперпропагаторов и др. Основанный на теореме единственности вывод необходимых и достаточных условий

CPT-симметрии будет изложен в сопутствующей статье. Пространства $S^0_\alpha(K)$ были нами привлечены для обхода трудностей, связанных с выводом аналога формулы (9) для $S'^0(K)$. Однако можно было с самого начала считать поля заданными на S^0_α – это дает не только более широкие рамки для построения теории, но и удобное операционное исчисление, основы которого изложены в [12–14]. Пространство S^0 использовалось во многих работах по нелокальной теории поля прежде всего потому, что $\tilde{S}^0$ совпадает с пространством Шварца $\mathcal{D}$, входящим в стандартный арсенал физика – теоретика. Мы следовали традиции, но необходимости в этом нет. Топологическая структура пространств $S^0(K)$ весьма сложна и даже доказательство полноты для них представляет серьезную проблему, для решения которой приходится использовать гомологические методы. Отметим еще, что в данной статье мы придерживались обычной бозе-ферми альтернативы и не рассматривали промежуточные статистики. Однако условие асимптотической коммутативности можно сформулировать и для нелокальных параполей, после чего вопрос о связи спина с парастатистикой фактически сводится к изложенному выше анализу.

Автор признателен проф. В. Я. Файнбергу за полезное обсуждение. Он благодарен также за финансовую поддержку, оказанную работе грантами Российского фонда фундаментальных исследований 96-02-16117 и ИНТАС 96-0398.

---

1. Р.Стритер, А.Вайтман, *PCT, спин и статистика и все такое*, М.: Наука, 1966. (R.F.Streater and A.S.Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That*, Benjamin, Reading, 1964.)
2. Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, А.И.Оксак и др., *Общие принципы квантовой теории поля*, М.: Наука, 1987.
3. В.Паули, в сб.: *Нильс Бор и развитие физики*, М.: ИЛ, 1958. (W.Pauli, in: *Niels Bohr and the Development of Physics*, Pergamon, London, 1955.)
4. Л.Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т.1, М.: Мир, 1986. (L.Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, vol.1, Springer, Berlin, 1983.)
5. Н.Н.Мейман, ЖЭТФ **47**, 1966 (1964).
6. A.Jaffe, Phys. Rev. **158**, 1454 (1967).
7. V.Ya.Fainberg and A.L.Filkov, Письма в ЖЭТФ **58**, 925 (1993).
8. V.Ya.Fainberg and M.A.Soloviev, ТМФ **93**, 514 (1992).
9. М.З.Иофа, В.Я.Файнберг, ЖЭТФ **56**, 1644 (1969).
10. W.Lücke, Commun. Math. Phys. **65**, 77 (1979).
11. W.Lücke, Acta Phys. Austriaca **55**, 213 (1984).
12. M.A.Soloviev, in: *Developments in Mathematics: The Moscow School*, Chapman and Hall, London, 1993.
13. M.A.Soloviev, Commun. Math. Phys. **184**, 579 (1997).
14. M.A.Soloviev, Lett. Math. Phys. **33**, 49 (1995).