Письма в ЖЭТФ, том 67, вып.8, стр.592 - 596 © 1998г. 25 апреля

ИНДУЦИРОВАННАЯ ШУМОМ СВЕРХЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К СЛАБЫМ ПЕРЕМЕННЫМ СИГНАЛАМ

С.Л.Гинзбург, М.А.Пустовойт[1)]

Петербургский институт ядерной физики им.Б.П.Константинова РАН

188350 Гатчина, Ленинградская обл., Россия

Поступила в редакцию 10 марта 1998 г.

Примером полезной роли шума в процессах передачи информации является известное явление стохастического резонанса. В настоящей работе мы рассматриваем другой такой пример – гигантское усиление сверхслабых сигналов в системе с on-off-перемежаемостью, индуцированное параметрическим шумом.

PACS: 02.50.Ey, 05.40.+j

До недавнего времени роль шума в процессах передачи информации считалась чисто деструктивной. Однако не так давно было открыто явление стохастического резонанса, то есть усиления сигнала и улучшения соотношения сигнал – шум при прохождении через систему сигнала с добавленным к нему шумом при оптимальной интенсивности последнего. Экспериментально и теоретически показано, что стохастический резонанс может существовать в самых различных системах, от ледниковых эпох до сквида (см., например, [1]). Тем самым было продемонстрировано, что шум способен играть важную конструктивную роль в процессе передачи сигнала.

В настоящей работе мы продемонстрируем эту конструктивную роль на другом примере – простой стохастической модели, демонстрирующей свойство on-off-перемежаемости. Системы с on-off-перемежаемостью в последнее время привлекают растущий интерес исследователей [2–4]. Эти системы характеризуются гигантскими флуктуациями физических величин, которые могут с близкой вероятностью принимать конечные значения и становиться в ламинарной фазе исчезающе малыми. Ниже мы опишем обнаруженное нами необычное явление, возникающее в этих системах, которое вызвано наличием в них параметрического шума оптимальной интенсивности. Это – гигантская реакция системы на очень малые воздействия (сверхчувствительность), когда возмущения порядка, например, 10^{-20} вызывают отклик порядка 1.

Простейшим уравнением, способным демонстрировать on-off-перемежаемость, является уравнение передемпфированного крамерсовского осциллятора [5, 6]:

$$dx/dt = \lambda x + \beta\xi(t)x - Ux^3 + \sigma\varphi(t) + AR(t),$$

$$\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \langle\varphi(t)\varphi(t')\rangle = \delta(t-t'), \quad \langle\xi(t)\varphi(t')\rangle = 0, \tag{1}$$

$$R(t+T) = R(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \le T/2 \\ -1, & T/2 < t \le T. \end{cases}$$

Здесь $\xi(t), \varphi(t)$ – гауссовский белый шум, $\lambda, \beta, U, \sigma, A$ – константы, а $R(t)$ – прямоугольный периодический сигнал. Уравнение (1) понимается по Стратоновичу. Мы

[1)] e-mail: markp@hep486.pnpi.spb.ru

видим, что шум входит в него как аддитивно, так и мультипликативно, и последний, как будет видно далее, и вызывает сверхчувствительность. Отметим, что случай $A = \sigma = 0$ был подробно изучен в книге [5].

В отсутствие шума ($\beta = \sigma = 0$) и при $A \ll 1$ уравнение (1) легко решается, и можно показать, что амплитуда выходного сигнала $\Delta x \sim A/|\lambda|$, то есть никакого усиления сигнала не происходит.

Уравнение Фоккера – Планка (УФП) для уравнения (1) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\lambda + \frac{\beta^2}{2}\right)x - Ux^3 + AR(t)\right]F\right\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left(\beta^2 x^2 + \sigma^2\right)F\right\}. \qquad (2)$$

Решить уравнение (2) в общем виде довольно трудно, поэтому воспользуемся следующим приближением. Сигнал $R(t)$ в (1) принимает два значения: ± 1. Пусть T_0 – время установления равновесия после переключения сигнала с одного значения на другое. Предположим, что сигнал удовлетворяет условию адиабатичности

$$T \gg T_0. \qquad (3)$$

УФП в этом случае легко решается. Получим при $(A, \sigma) \ll (\lambda, \beta, U)$

$$F(x) = C\left(x^2 + \frac{\sigma^2}{\beta^2}\right)^{(\alpha-1)/2} \exp\left\{\frac{2AR(t)}{\beta\sigma}\arctan\frac{\beta x}{\sigma} - \frac{Ux^2}{\beta^2}\right\}, \qquad (4)$$

$$\alpha = 2\lambda/\beta^2,$$

где C – нормировочная константа.

В дальнейшем у нас будет везде $\beta, U \sim 1$, $\lambda \sim 0.01$, A, $\sigma \sim 10^{-n}$, $n \gg 1$. Тогда в очень широкой области $10^{-n} \ll x \ll 1$ из (4) получаем скейлинговую плотность распределения:

$$F(x) \sim x|^{\alpha-1}, \qquad (5)$$

что является, согласно [6 – 8], одним из критериев наличия on-off-перемежаемости. Рассмотрим предел $\sigma \to 0$ (слабый сигнал много больше аддитивного шума). Полагая

$$\arctan\frac{\beta x}{\sigma} \xrightarrow{\sigma\to 0} \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} x - \frac{\sigma}{\beta x},$$

мы получим

$$F(x) = C|x|^{\alpha-1}\exp\left\{\frac{A\pi R(t)}{\beta\sigma}\operatorname{sign} x - \frac{2AR(t)}{\beta^2 x} - \frac{Ux^2}{\beta^2}\right\}. \qquad (6)$$

Большой первый член в экспоненте означает, что при положительном сигнале R плотность распределения отлична от нуля лишь для положительных x, а при отрицательном - для отрицательных, то есть

$$F(x) = C|x|^{\alpha-1}\theta(\operatorname{sign} AR(t)x)\exp\left\{-\frac{2AR(t)}{\beta^2 x} - \frac{Ux^2}{\beta^2}\right\}, \qquad (7)$$

где $\theta(x)$ – единичная функция Хевисайда. Нормировочный множитель C точно не вычисляется, а его ассимптотики при $|\alpha| \ll 1$, $U/\beta^2 \sim 1$ имеют вид

$$C = \begin{cases} \alpha;\ \alpha > 0,\ z \gg 1, \\ 1/\ln\frac{1}{A};\ z \ll 1, \\ |\alpha|A^{|\alpha|};\ \alpha < 0,\ z \gg 1, \end{cases} \qquad (8)$$

$$z = |\alpha| \ln \frac{1}{A}.$$

Смена ассимптотик в (8), то есть кроссовер, происходит, когда параметр z становится порядка единицы, то есть при амплитуде сигнала

$$A_0 = \exp\left(-1/r|\alpha|\right). \tag{9}$$

Таким образом, при малых значениях α очень слабый сигнал способен кардинальным образом менять плотность распределения.

Чтобы оценить амплитуду выходного сигнала, вычислим моменты $F(x)$ при $z \ll \ll 1$. Учитывая явный вид $R(t)$, получим:

$$\langle x(t) \rangle = \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\pi}{U}}\frac{1}{\ln(1/A)}R(t), \quad \langle x^2(t) \rangle = \frac{\beta^2}{2U}\frac{1}{\ln(1/A)}, \tag{10}$$

$$\frac{\langle x(t) \rangle^2}{\langle x^2(t) \rangle} = \frac{\pi}{2\ln(1/A)} \ll 1.$$

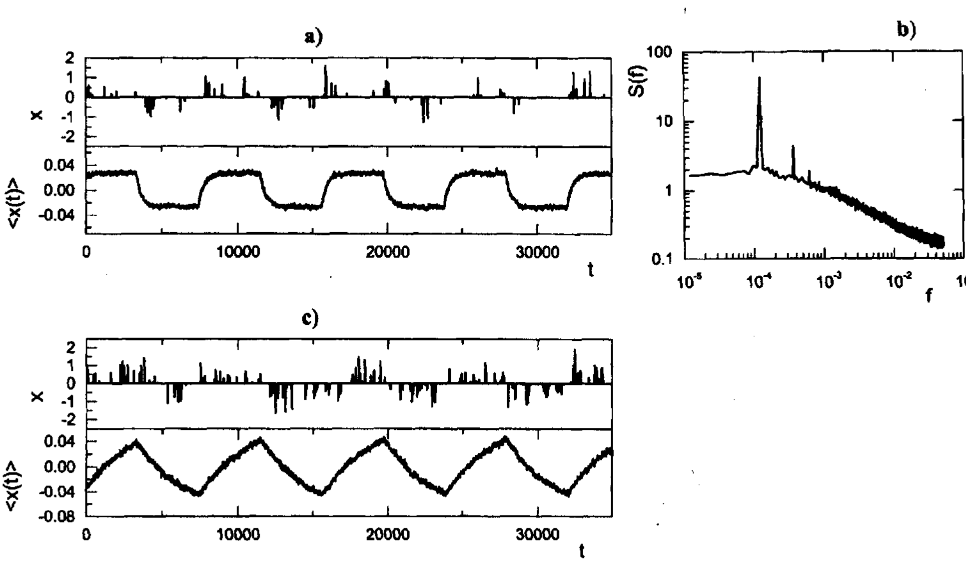

Рис.1.a) Реализация выходного сигнала x и среднего $< x(t) >$ по ансамблю из 4100 реализаций с одинаковой фазой входного сигнала при $\beta = 1.0, \lambda = -0.01$; b) Спектр мощности x сигнала a, полученный усреднением по 200 реализациям со случайной фазой; c) То же, что и a), но при $\lambda = 0.03$. Амплитуда входного сигнала $A = 10^{-11}$, период $T = 8192$

Коэффициент усиления сигнала равен:

$$I = \frac{\langle x(t) \rangle}{AR(t)} = \sqrt{\frac{\pi}{4U}}\frac{\beta}{A\ln(1/A)}. \tag{11}$$

Например, при $\beta = 0.7$, $U = 1$, $A = 10^{-11}$ получим $I = 2.5 \cdot 10^9$. Таким образом, наша модель передемпфированного крамерсовского осциллятора благодаря мультипликативному шуму обладает свойством сверхчувствительности к слабым сигналам. Похожее явление – чувствительность системы к слабому *постоянному возмущению*, вызванная добавляемым к возмущению шумом, изучалась ранее (см.[9] и ссылки в ней) на примере хиральной селективности химической реакции. В нашем случае, помимо того, что шум, индуцирующий чувствительность, является параметрическим, система способна усиливать сигнал, *зависящий от времени.* Несмотря на большую, по сравнению с сигналом, дисперсию x, явление легко обнаружить обычными статистическими методами. Так, на рис.1 приведены реализации $\langle x(t)\rangle$ при $A = 10^{-11}$, $\lambda = -0.01$ и 0.01, $\beta = 1.0$, $U = 1$ как средние по ансамблю из 4100 реализаций $x(t)$ с одинаковой фазой входного сигнала. Отметим, что при сравнительно небольших *усредненных* величинах сигнала, *мгновенные* значения амплитуды могут достигать величин порядка 1, делая возможным обнаружение сверхслабого сигнала малочувствительным детектором. Если выполнено условие адиабатичности, то, согласно (10), $\langle x(t)\rangle = yR(t)$, и коэффициент усиления $I = y/A$. Если же условие адиабатичности не выполняется, можно определить I по формуле

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\langle x(t)\rangle^2}{A^2}dt. \tag{12}$$

Поскольку, как видно из рис.1, даже после усреднения по большому числу реализаций $\langle x(t)\rangle$ остается стохастической функцией, коэффициент I в (12) удобнее вычислять другим способом. В [10] показано, что, если мы имеем совокупность реализаций со случайной фазой, то их спектральная плотность равна

$$S(\omega) = 2\pi\sum_k |x_k|^2\delta(\omega - k\Omega) + S_{noise}(\omega),$$

где x_k есть коэффициенты Фурье периодической функции $\langle x(t)\rangle$, а S_{noise} - шумовой вклад в спектральную плотность. Из (12) видно, что

$$I^2 = \sum_k |x_k|^2/A^2, \text{ то есть } I^2 = \frac{\delta f}{A^2}\sum_i(S_i - S_{noise}),$$

где S_i есть i-я гармоника сигнала в спектре, а δf – ширина спектральной полосы. На рис.2*a* приведена зависимость I от параметра λ при фиксированном шуме $\beta = 0.7$. Видно, что оценка (11), написанная для случая $|\alpha| \approx 0$, прекрасно согласуется с расчетными данными. Штриховой линией на рисунке показаны результаты, полученные при постоянном входном сигнале ($R(t) = 1$). Коэффициент усиления становится ниже статического значения тогда, когда время релаксации T_0 (точечная линия на рис.2*a*; аналитическая оценка, как можно показать, есть $T_0 \sim A^{-\alpha}$) становится сравнимым с периодом сигнала, то есть условие адиабатичности нарушается. При увеличении периода сигнала область адиабатичности увеличивается, как это и видно на рис.2*a*. Рис.2*b* демонстрирует зависимость усиления от величины управляющего (мультипликативного) шума. Эта зависимость имеет максимум, как при обычном стохастическом резонансе, с той разницей, что в нашей системе сигнал является аддитивным, а шум - параметрическим.

Таким образом, нами продемонстрировано аналитически и с помощью компьютерного моделирования, что простая стохастическая система с on-off-перемежаемостью при малых абсолютных значениях параметра α обладает индуцированной шумом сверхчувствительностью к слабым переменным сигналам, являясь примером конструктивной роли шума в природе.

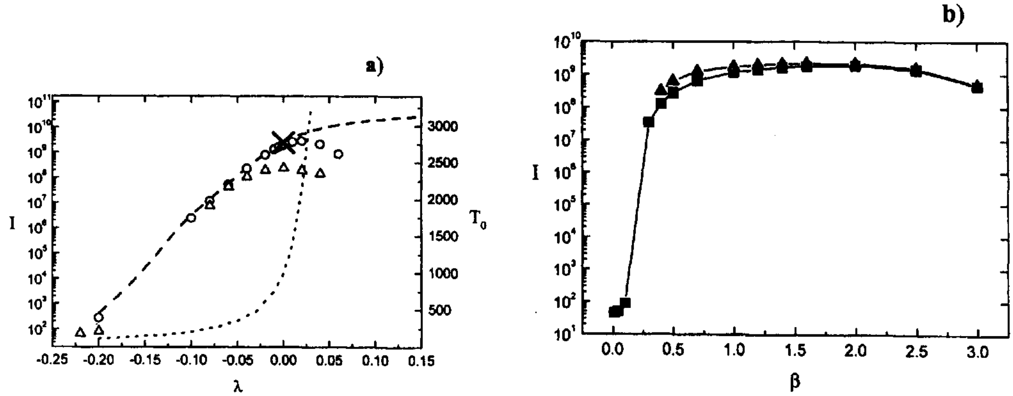

Рис.2. a) Зависимость коэффициента усиления I при периоде сигнала $T = 819(\triangle)$, $T = 8192(\circ)$ и времени релаксации T_0 (точечная линия) от параметра λ при фиксированном $\beta = 0.7$. Штриховой линией показаны результаты при статическом входном сигнале. Крестик – оценка (11). b) Зависимость I от интенсивности мультипликативного шума β при значениях $\lambda = -0.01(\blacksquare)$ и $0.01(\blacktriangle)$. Параметры входного сигнала те же, что и на рис.1

Работа поддержана Государственной программой "Физика квантовых и волновых процессов", подпрограмма "Статистическая физика", проект VIII-3, а также Государственной программой "Нейтронные исследования вещества".

---

1. L.Gammaitoni, P.Hänggi, P.Jung, and F.Marchesoni, Rev. Mod. Phys, **70**, 223 (1998).
2. N.Platt, E.A.Spiegel, and C.Tresser, Phys. Rev. Lett. **70**, 279 (1993).
3. J.F.Heagy, N.Platt, and S.M.Hammel, Phys. Rev. **E49**, 1140 (1994).
4. N.Platt, S.M.Hammel, and J.F.Heagy, Phys. Rev. Lett. **72**, 3498 (1994).
5. W.Horsthemke and R.Lefever, *Noise-induced phase transitions*, Springer, N.Y., 1984.
6. H.L.Yang and E.J.Ding, Phys. Rev. **E54**, 1361 (1996).
7. A.S.Pikovsky, Phys. Lett. **A165**, 33 (1992).
8. A.S.Pikovsky and P.Grassberger, J. Phys. **A24**, 4567 (1991).
9. D.K.Kondepudi, I.Prigogine, and G.W.Nelson, Phys. Lett. **A111**, 29 (1985).
10. P.Jung, Phys. Rep. **234**, 175 (1993).