Письма в ЖЭТФ, том 65, вып.8, стр.600 - 605 © 1997г. 25 апреля

# МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОГО ПОЛЯ $H_{c2}$ И ОБРАЗОВАНИЕ МЕТАСТАБИЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ПРИ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ $\kappa < 1$

*Ю.Н.Овчинников*

*Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН*

*117334 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 апреля 1997 г.

Найдена магнитная индукция в цилиндрических образцах сверхпроводников в магнитных полях, близких к $H_{c2}$. Показано, что в достаточно широкой области значений параметра Гинзбурга-Ландау $\kappa < 1$, соответствующих сверхпроводникам первого рода, существуют метастабильные состояния вихревого типа.

PACS: 74.25.Ha

1. **Введение.** Смешанное состояние сверхпроводников второго рода было исследовано в работе Абрикосова [1]. Однако при вычислении величины магнитного поля им было сделано неверное предположение, которое тем не менее результативно оказывается оправданным при условии, что значение параметра Гинзбурга-Ландау $\kappa$ превышает единицу и не близко к ней. В результате оказалось, что смешанное состояние не существует при значениях параметра Гинзбурга-Ландау $\kappa < 1$. Фактически же смешанное состояние может быть реализовано в широкой области $\kappa < 1$, соответствующей сверхпроводникам первого рода, а структура вихревой решетки сама зависит от величины $\kappa$.

2. **Решение уравнения Гинзбурга-Ландау вблизи критического поля $H_{c2}$.** Свободную энергию сверхпроводящего состояния $F_S$ во внешнем магнитном поле $H_0$ можно представить в виде [2]

$$F_S - F_N = \nu \int d^2\mathbf{r}\{-(1-T/T_c)|\Delta|^2 + \frac{\pi D}{8T_c}|\partial_-\Delta|^2 + \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2T_c^2}|\Delta|^4\} +$$

$$+\frac{1}{8\pi}\int d^3\mathbf{r}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{H}_0\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} + \mathbf{H}_0^2), \qquad (1)$$

где $\mathbf{A}$ – векторный потенциал, $\partial_- = \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - 2ie\mathbf{A}$, $\nu = mp_0/2\pi^2$ – плотность состояний на поверхности Ферми. Коэффициент $D$ зависит от транспортной длины свободного пробега электронов $l_{\mathrm{tr}}$ и равен

$$D = D_{dif}\cdot\eta;\ \ D_{dif} = \frac{vl_{\mathrm{tr}}}{3};\ \ \eta = 1 - \frac{8T\tau_{\mathrm{tr}}}{\pi}\left(\psi\left(1/2 + \frac{1}{4\pi T\tau_{\mathrm{tr}}}\right) - \psi(1/2)\right)$$

$$l_{\mathrm{tr}} = v\cdot\tau_{\mathrm{tr}}, \qquad (2)$$

$v$ – скорость электронов на поверхности Ферми, $\psi(x)$ – пси-функция Эйлера. Варьируя свободную энергию (1) по $\Delta$ и $\mathbf{A}$ получаем систему уравнений Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\pi D}{8T_c}\partial_-^2\Delta + (1-T/T_c)\Delta - \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2T_c}|\Delta|^2\Delta = 0$$

$$\frac{1}{4\pi}\text{rot rot}\,\mathbf{A} = j, \quad j = \frac{i\pi e\nu D}{4T_c}(\Delta\partial_+\Delta^* - \Delta^*\partial_-\Delta). \tag{3}$$

В точке по магнитному полю

$$H = H_{c2} = \frac{4T_c}{\pi e D}(1 - T/T_c), \tag{4}$$

линеаризованное уравнение (3) имеет решения вида [2]

$$\Delta = \exp\left(2ieHx_1y - eH(x - x_1)^2\right), \tag{5}$$

при произвольном значении параметра $x_1$. При получении уравнения (5) использована калибровка

$$A = (0, \;\; Hx, \;\; 0). \tag{6}$$

При $H_0 < H_{c2}$ решения уравнения (3) будем искать такие, что физические величины: $|\Delta|^2, H(x,y), j$ есть периодические функции координат $x, y$. Предположим, что $\mathbf{a}_{1,2}$ - вектора элементарной ячейки, т.е.

$$|\Delta(\mathbf{r} + N\mathbf{a}_1 + M\mathbf{a}_2)|^2 = |\Delta(\mathbf{r})|^2. \tag{7}$$

Из условия периодичности плотности тока, находим

$$\oint_\Gamma \left(\frac{\partial\chi}{\partial\mathbf{r}} - 2e\mathbf{A}\right) d\mathbf{l} = 0, \tag{8}$$

где $\Gamma$ - замкнутый контур, идущий вдоль ребер элементарной ячейки, $\chi$ - фаза параметра порядка. Поскольку параметр порядка является однозначной функцией координат, то уравнение (8) приводит к условию квантования магнитного потока $\phi$ через элементарную ячейку

$$\phi = \frac{\pi}{e}N, \quad N = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Это точное соотношение существенно упрощает поиск решения системы уравнений (3).

В магнитном поле $H_0 < H_{c2}$ решение уравнения (3) ищем в виде

$$\mathbf{A} = (0, \;\; Bx, \;\; 0) + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots$$

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots$$

$$\Delta_0 = \sum_N C_N \exp\left(2ieBNx_1y - eB(x - Nx_1)^2\right), \tag{10}$$

где $B$ – индукция магнитного поля внутри сверхпроводника ($B =< H(\mathbf{r}) >$), а вектора $\mathbf{A}_k$ имеют ненулевые две компоненты (1,2) и пропорциональны $(H_{c2} - B)^k$. Величины $|\Delta_k|^2 \sim (H_{c2} - B)^{2k+1}$, $C_N^2 \sim (H_{c2} - B)$. Ниже мы будем использовать калибровку $\text{div}\,\mathbf{A} = 0$. В этой калибровке все величины $\mathbf{A}_k$ - периодические функции координат. В калибровке, использованной в работе

[1], величины $A_k$ – растущие функции $x$, что приводит к дополнительным трудностям при исследовании системы уравнений (3).

В изотропном сверхпроводнике следует ожидать, что $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2|$. Предположим, что $\mathbf{k}_{1,2}$ - элементарные вектора обратной решетки. Параметр порядка $|\Delta|^2$ в этом случае может быть представлен в виде

$$|\Delta|^2 = \sum_{N,M=-\infty}^{\infty} C_{NM} \exp\left(i(N\mathbf{k}_1 + M\mathbf{k}_2)\mathbf{r}\right). \tag{11}$$

Для треугольной решетки с одним квантом потока в ячейке находим:

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}x_1}(0,1); \quad \mathbf{k}_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}x_1}(\sqrt{3},-1),$$

$$2\sqrt{3}eBx_1^2 = \pi; \quad C_N = C_0 \exp\left(-\frac{i\pi}{2}N^2\right),$$

$$C_{N,M} = C_0^2 3^{1/4} \exp\left(-i\pi NM - \frac{\pi}{\sqrt{3}}(N^2 + M^2 - NM)\right). \tag{12}$$

Для квадратной решетки с одним квантом потока в ячейке получаем

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2\pi}{x_1}(0,1); \quad \mathbf{k}_2 = \frac{2\pi}{x_1}(1,0),$$

$$eHx_1^2 = \pi; \quad C_{N+1} = C_N = C_0,$$

$$C_{N,M} = \frac{C_0^2}{\sqrt{2}}(-)^{MN} \exp\left(-\frac{\pi}{2}(N^2 + M^2)\right). \tag{13}$$

Приведем также выражение для величин, характеризующих треугольную решетку с двумя квантами потока в ячейке:

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}x_1}(0,1); \quad \mathbf{k}_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}x_1}(\sqrt{3},-1),$$

$$\sqrt{3}eHx_1^2 = \pi; \quad C_{N+1} = C_N = C_0,$$

$$C_{N,2K+1} = 0; \quad C_{N,2K} = \frac{C_0^2 3^{1/4}}{\sqrt{2}} \exp\left(i\pi K(N-K) - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(N^2 + 4K^2 - 2KN)\right). \tag{14}$$

Для параметра порядка $\Delta_0$, определяемого выражением (10), плотность тока $j_1$ выражается через квадрат модуля параметра порядка $|\Delta_0|^2$

$$j_1 = -\frac{\pi e\nu D}{4T_c}\left(\frac{\partial}{\partial y}; \quad -\frac{\partial}{\partial x}\right)|\Delta_0|^2, \tag{15}$$

и, следовательно, уравнение (3) на магнитное поле $H_1$ принимает вид [1]

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}; \quad -\frac{\partial}{\partial x}\right) H_1(\mathbf{r}) = -\frac{\pi^2 e\nu D}{T_c}\left(\frac{\partial}{\partial y}; \quad -\frac{\partial}{\partial x}\right)|\Delta_0|^2. \tag{16}$$

Из уравнения (16) следует, что магнитное поле $H_1(r)$ внутри сверхпроводника представимо в виде

$$H_1(\mathbf{r}) = -\frac{\pi^2 e\nu D}{T_c}\left(|\Delta_0|^2 - <|\Delta_0|^2>\right), \tag{17}$$

поскольку векторный потенциал $A_1$ ($\mathrm{rot}\, A_1 = H_1$) должен оставаться ограниченным.

В отличии от работы [1] мы считаем, что индукция $B$ не может быть восстановлена из уравнения (16), поскольку в термодинамическом пределе система уравнений (3) имеет огромное число решений $\sim eHR^2 \gg 1$ ($R$ - характерный поперечный размер цилиндра). Свободным параметром является площадь элементарной ячейки (индукция магнитного поля $B$). Следовательно индукция $B$ должна определяться из условия минимума свободной энергии (1) относительно $B$ при заданном значении величины внешнего магнитного поля $H_0$

$$\frac{\partial(F_S - F_N)}{\partial B} = 0. \tag{18}$$

В конечном счете, невозможность определения величины магнитной индукции $B$ из уравнения (3) на векторный потенциал связана с протеканием поверхностных токов. Полный магнитный момент M создается как объемными (решеточными токами) так и поверхностным током. Первый из них определяется структурой решетки и может быть легко найден. Вклад поверхностных токов приводит к образованию большого числа метастабильных состояний. Условие (18) выбирает из них такое, которое дает минимум свободной энергии.

Из уравнений (1), (10) следует, что плотность свободной энергии $(F_S - F_N)/V$ представима в виде ряда по степеням $(H_{c2} - B)$

$$(F_S - F_N)/V = \frac{1}{8\pi}\left\{(B - H_0)^2 + P_1(H_{c2} - B)^2 + P_2(H_{c2} - B)^3/H_{c2} + \dots\right\}. \tag{19}$$

Коэффициенты $P_k$ в уравнении (19) определяются типом вихревой решетки и величиной параметра $\kappa$. Для определения величины коэффициента $C_0$ воспользуемся известным методом устранения секулярных членов в уравнении (3).

Условие $|\Delta_1| \ll |\Delta_0|$ может быть выполнено, если только неоднородная часть в линеаризованном уравнении (3) ортогональна к $\Delta_0$ (см. также [1]). Из этого условия получаем следующее уравнение на $C_0$

$$\frac{\pi e D}{4T_c}(H_{c2} - B) < |\Delta_0|^2 > - \frac{7\xi_{(3)}}{8\pi^2 T_c^2} < |\Delta_0|^4 > + \frac{1}{\nu}(\mathbf{A}_1\mathbf{j}_1) = 0, \tag{20}$$

где векторный потенциал $\mathbf{A}_1$ определяется выражением

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_1 = H_1, \quad \textit{или} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}_1}{\partial r^2} = 4\pi \mathbf{j}_1. \tag{21}$$

В уравнении (21) $\mathbf{A}_1$ является периодической функцией координат, а магнитное поле $H_1$ и плотность тока $\mathbf{j}_1$ определяются уравнениями (17), (15).

Используя уравнения (15), (16), (21), находим

$$< \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_1 > = \frac{1}{4\pi} < H_1^2 > . \tag{22}$$

Из уравнений (17), (20), (22) находим следующее выражение для величины $< |\Delta_0|^2 >$

$$< |\Delta_0|^2 > = \frac{2\pi^3 e D T_c}{7\zeta(3)} \frac{H_{c2} - B}{\beta - (\beta - 1)/\kappa^2}, \tag{23}$$

где $\kappa$ - параметр Гинзбурга-Ландау, а величина $\beta$ определяется отношением

$$\beta = \frac{< |\Delta_0|^4 >}{< |\Delta_0|^2 >^2}; \quad \kappa = \frac{1}{\pi^2 e D} \left( \frac{7\zeta(3)}{2\pi\nu} \right)^{1/2}, \tag{24}$$

$\zeta(x)$ - дзета-функция Римана.

Приведем для справок значение коэффициента $\beta$ для трех типов решеток. Эти значения тривиально находятся с помощью формул (12), (13), (14):

$\beta = 1.15952$ – треугольная решетка с одним квантом потока;

$\beta = 1.18034$ – квадратная решетка с одним квантом потока;

$\beta = 1.33897$ – треугольная решетка с двумя квантами потока.

Теперь мы можем найти свободную энергию $F_S$ в вихревом состоянии. Из уравнений (1), (22), (23) находим

$$(F_S - F_N)/V = \frac{1}{8\pi}(B - H_0)^2 - \frac{(H_{c2} - B)^2}{8\pi\kappa^2(\beta - \frac{\beta-1}{\kappa^2})} + P_2 \frac{(H_{c2} - B)^3}{8\pi H_{c2}} + \dots . \tag{25}$$

Коэффициент $P_2$ в уравнении (25) порядка единицы и мы найдем его зависимость от $\kappa$ и структуры решетки в другом месте.

Отметим также, что если параметр $\kappa > 1$ и не близок к ней, то вблизи $H_{c2}$ последний член в уравнении (25) мал и может быть опущен. В этом случае из уравнения (18) находим

$$H_0 - B = \frac{H_{c2} - B}{\beta\kappa^2(1 - 1/\kappa^2)}. \tag{26}$$

Выражение (26) совпадает с результатом Абрикосова [1]. Однако при приближении $\kappa$ к единице область применимости формулы (26) сужается. И при значениях $\kappa < 1$ решение уравнения (17) по методу Абрикосова соответствует точке максимума свободной энергии (1), а не минимума. Для получения минимума необходимо учитывать третий член в уравнении (25). Положим

$$Z = H_{c2} - B. \tag{27}$$

Из уравнений (18), (25) находим

$$Z = -\frac{H_{c2}\beta(\kappa^2 - 1)}{3P_2(1 + \beta(\kappa^2 - 1))} + \sqrt{\left(\frac{H_{c2}\beta(\kappa^2 - 1)}{3P_2(1 + \beta(\kappa^2 - 1))}\right)^2 + \frac{2H_{c2}(H_{c2} - H_0)}{3P_2}}. \tag{28}$$

Отметим, что поправка к свободной энергии в точке минимума, определяемая формулами (25), (28), всегда отрицательна. В равной степени, на всем пути движения $B$ от $H_0$ до точки $B_{min}$ свободная энергия (25) также отрицательна. Это означает, что "переохлаждение" – задержка с переходом в сверхпроводящее состояние ($\kappa < 1$) – может произойти лишь до точки $H_{c2} < H_c$ ($H_c$ – термодинамическое критическое поле).

Выражение для свободной энергии, определяемое формулами (25), (28), имеет нетривиальную зависимость от параметров $\kappa, \beta$. Тем самым для определения типа решетки в окрестности точки $\kappa = 1$ требуется вычисление величины $P_2$.

Работа поддержана CRDF грантом RP1-194.

---

1. А.А.Абрикосов. ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
2. В.Л.Гинзбург, Л.Д.Ландау. ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).
3. *Superconductivity*, Ed. R.D.Parks, M.Dekker, INC. New York 1969.
4. P.G.de Gennes, *Superconductivity of metals and alloys*, W.A.Benjamin, INC. New York-Amsterdam, 1966.