

О НЕКВАЗИНЕЙТРАЛЬНОСТИ И ТУРБУЛЕНТНОМ ПЕРЕНОСЕ ТЕПЛА В ТОКАМАКЕ

С.Н.Гордиенко, Э.И.Юрченко*

Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН
142432 Черноголовка, Московской обл., Россия

*Российский научный центр "Курчатовский институт"
123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 февраля 1998 г.

После переработки 1 апреля 1998 г.

Предложен новый подход к описанию далекого от термодинамического равновесия стационарного турбулентного состояния, формирующегося в плазменном шнуре токамака в результате развития микронеустойчивостей. Принципиальной особенностью такой сильнонеравновесной плазмы является ее неквазинейтральность, то есть свойства плазмы в значительной мере определяются электрическими полями, локализованными на масштабе порядка дебаевского радиуса. Установлено, что коэффициент поперечной температуропроводности определяется выражением

$$\chi_{\perp}(r) = \text{const} \frac{eU}{mc^2} \frac{q(r)}{2 - S(r)} \frac{cT(r)}{eB},$$

где U — напряжение на обходе токамака. В рамках предлагаемого подхода объясняется соотношение $n(r)q(r) = \text{const}$ и рост температуропроводности на периферии плазменного шнура.

PACS: 52.25.Dy, 52.35.Ra, 52.55.Fa

В настоящее время проектирование термоядерного реактора на основе токамака является одной из самых актуальных прикладных задач физики плазмы. Вместе с тем, несмотря на достигнутые успехи, понимание ряда важнейших физических процессов, происходящих в плазме токамака, все еще отсутствует. Трудности, связанные с описанием плазменного шнура, вызваны тем, что в макроскопически устойчивом режиме плазма токамака не является полностью устойчивой [1], так как в ней может развиваться широкий класс различных кинетических неустойчивостей.

1. В представляющих наибольший интерес режимах работы токамаков созданы такие условия, когда плазменный шнур находится в макроскопически устойчивом состоянии, но существуют микронеустойчивости, которые могут развиваться в плазме шнура [2].

Стандартный подход к описанию микронеустойчивостей состоит в линеаризации кинетического уравнения в окрестности равновесного состояния и исследовании линеаризованной задачи на наличие растущих по времени возмущений [2]. К сожалению, подобный подход не позволяет описать конечный результат развития неустойчивостей, то есть описать неравновесное с точки зрения термодинамики стационарное турбулентное состояние, возникающее в результате стабилизации неустойчивостей нелинейными взаимодействиями. Заметим, что для понимания физики разрядов в токамаке интерес представляет не столько линейная неустойчивость, которая привела к стационарному неравновесному состоянию, сколько описание самого состояния плазмы с установившейся микротурбулентностью.

Для описания турбулентного стационарного состояния (развитой микротурбулентности) плазмы в работе [3] был предложен совершенно другой подход. Напомним, что неустойчивости в плазме возникают из-за неравновесности плазмы, то есть из-за того, что приходящаяся на одну частицу энтропия отличается на величину Δs от значения энтропии s_{max} в термодинамически равновесном состоянии. Поскольку

$$s_{max} = \int_0^T \frac{c_V}{T} dT,$$

вклад в интеграл от температур, превышающих $e^2 n^{1/3}$, для которых для плазмы можно считать $c_V = 3/2$, оценивается величиной $\ln N_D$, то есть большое число частиц в дебаевской сфере $N_D = (T/e^2 n^{1/3})^{3/2}$ оказывается достаточным условием для возможности реализации неравновесных состояний высокотемпературной плазмы с большими Δs . Для описания однородной изотропной установившейся микротурбулентности в [3] после предельного перехода $\exp(\Delta s) \rightarrow \infty$ был рассмотрен предел больших времен $t \rightarrow +\infty$ (порядок предельных переходов важен!). Таким образом, предполагается, что плазма в токамаке все время находится в состоянии, далеком от термодинамически равновесного. Это не противоречит H -теореме, из которой следует монотонное возрастание энтропии с характерным временем порядка столкновительного, поскольку H -теорема доказывается для замкнутой системы, а к плазменному шнуру токамака подводится мощность и поток энергии может постоянно обеспечивать сильную неравновесность плазмы. Если условие сильной неравновесности плазмы в том или ином типе плазменных установок оказывается не согласующимся с граничными условиями, характером нагрева или получающиеся из него теоретические предсказания противоречат экспериментальным данным, то от гипотезы о сильнонеравновесном турбулентном стационарном состоянии, реализующемся в этой установке, следует отказаться и рассмотреть неравновесные стационарные состояния, близкие к термодинамически равновесному.

Кинетические уравнения, пригодные для описания плазмы с сильной неравновесностью, получены в [3], где показано, что с этими кинетическими уравнениями связана нетривиальная двухпараметрическая абелева группа преобразований (группа турбулентных размерностей [3]), переводящая одно их решение в другое. Рассмотрение решений, инвариантных относительно подгруппы группы турбулентных размерностей, выделяемой условием $\lambda_2 = \lambda_1^{D+1/2}$, где λ_1 и λ_2 — параметры группы турбулентных размерностей, показывает, что в "прямом" магнитном поле при наличии развитой микротурбулентности

$$\exp(\Delta s) \gg 1 \quad (1)$$

существует целое однопараметрическое семейство стационарных турбулентных состояний плазмы, параметризуемых параметром D . Соображения размерностей, применяемые как по отношению к обычным физическим размерностям (τ , см, с), так и по отношению к новым "формальным" размерностям, описываемым группой турбулентных размерностей [3, 4], позволяют убедиться, что при $D^2 \ll 1$ коэффициенты поперечной температуропроводности и продольной проводимости даются выражениями

$$\chi_{\perp} = C_1 D^2 \chi_{Bohm} + C_2 \left(\frac{\tau_D}{\rho_e} \right)^2 \chi_{ct}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sigma_{\parallel}} = C_3 \frac{D^2}{\Omega_{ce}} + C_4 \frac{1}{\sigma_{Sp}}, \quad (3)$$

а плотность энергии W флуктуационных электрических полей равна

$$\frac{W}{nT} = C_5 \frac{1}{N_D^{2/3}} + C_6 D^2 \left(\frac{r_D}{\rho_e} \right)^2, \quad (4)$$

где $\chi_{Bohm} \sim T/B$ и $\chi_{cl} \sim n/B^2 \sqrt{T}$ – боровская и классическая температуропроводности плазмы, Ω_{ce} и $\sigma_{Sp} \sim T^{3/2}$ – циклотронная частота и спитцеровская проводимость плазмы, C_i , $i = \overline{1,6}$ – фиксированные числа, r_D и ρ_e – дебаевский радиус и ларморовский радиус электрона, соответственно. Таким образом, параметр неквазинейтральности D , возникающий как симметричное свойство, согласно (4), характеризует величину флуктуаций электрического поля на дебаевском масштабе, то есть эффекты неквазинейтральности плазмы (см. подробности в работе [5]).

2. При рассмотрении однородной и изотропной развитой микротурбулентности [3–5] величина D являлась таким же независимым параметром задачи, как n или T , и указывала на тип турбулентности, реализуемый в плазме. Однако в реальном токамаке величина D должна вычисляться, исходя из заданных граничных и начальных условий, режимов подвода энергии и вещества к плазменному шнуру.

В случае токамака, как будет следовать из дальнейшего, интерес представляют лишь малые D^2 , при которых, однако, первое слагаемое в (2) и (3) значительно превышает второе, то есть справедливо неравенство

$$\frac{1}{N_D} \left(\frac{r_D}{\rho_e} \right)^2 \ll D^2 \ll 1. \quad (5)$$

Считая весь ток в плазме, текущий вдоль оси токамака, индукционным, что справедливо в силу неравенства $a/R \ll 1$, где a и R – малый и большой радиусы токамака (во всех формулах в дальнейшем мы также сохраняем лишь члены первого исчезающего порядка по параметру a/R , то есть не учитываем эффекты, возникающие в более высоких порядках), из закона Ома получаем

$$j = \sigma_{\parallel} E, \quad (6)$$

где E – электрическое поле, поддерживающее индукционный ток в токамаке.

Используя (3), (5), (6) и связь плотности тока с коэффициентом запаса устойчивости $q(r)$, находим

$$D^2(r) = \frac{1}{C_3} \frac{eU}{mc^2} \frac{q(r)}{2 - S(r)}, \quad (7)$$

где $U = 2\pi RE$ – напряжение обхода на токамаке, а для коэффициента поперечной температуропроводности, согласно (2), получаем

$$\chi_{\perp}(r) = \frac{C_1}{C_3} \frac{eU}{mc^2} \frac{q(r)}{2 - S(r)} \frac{cT(r)}{eB}, \quad (8)$$

где B – тороидальное магнитное поле, $S(r) = rq'(r)/q(r)$ – шир, $T(r)$ – температура на расстоянии r от оси по малому радиусу, $q(r) = rB/RB_{\Theta}(r)$, $B_{\Theta}(r)$ – полоидальное магнитное поле.

Для получения более детальных сведений о радиальной зависимости коэффициента температуропроводности в плазменном шнуре следует изучить вопрос о самосогласованном распределении температуры и коэффициента запаса устойчивости, чему посвящены следующие разделы настоящей работы.

3. Прежде всего, рассмотрим вопрос о нахождении $D(\mathbf{r})$ в макроскопически устойчивой плазме при заданных $T(\mathbf{r})$ и $n(\mathbf{r})$. Заметим, что чем больше значение параметра неквазинейтральности D , тем сильнее флуктуационные электрические поля, развитые в плазме [5], а значит, и корреляции между частицами, создающими плазму, то есть при увеличении D уменьшается доля фазового объема, доступная системе, что влечет и уменьшение энтропии, так как величина D определяет амплитуду коллективных (макроскопических) движений, возбужденных в плазме и коррелированных на масштабах порядка дебаевского радиуса.

Таким образом, если вся плазма находится в макроскопически устойчивом состоянии, то требование максимума плотности энтропии приведет к установлению минимального значения D , совместимого с условием макроскопической устойчивости в данном объеме. Следовательно, требование гидродинамической устойчивости плазмы позволяет вычислять параметр неквазинейтральности, который формируется из-за развития кинетических неустойчивостей.

Принцип максимума плотности энтропии не является произвольным условием, а следует из динамики плазмы. Если система эргодична, то время τ_D , проводимое системой в области фазового пространства $\Delta\Gamma_D$, с заданным значением параметра неквазинейтральности D

$$\tau_D \sim \Delta\Gamma_D = \exp(Ns_D), \quad (9)$$

где s_D – энтропия, приходящаяся на одну частицу в турбулентном состоянии плазмы с параметром неквазинейтральности D , а N – число частиц в системе.

Требование роста энтропии при эволюции позволяет детальнее описать процесс поперечного теплопереноса в плазме с параметром неквазинейтральности, подчиненным (5). Малость D^2 позволяет не учитывать при вычислении энтропии зависимость функций распределения от параметра неквазинейтральности, учитывая зависимость от D^2 лишь в коэффициентах переноса. В этом приближении, исходя из формулы Больцмана для энтропии идеального газа, применимой к плазме при малых D^2 , можно записать

$$S = \text{const} \int n(\mathbf{r}) \ln \left(\frac{T^{3/2}(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \right) dV, \quad (10)$$

а требование, чтобы при любых начальных условиях система увеличивала энтропию, приводит к следующему выражению для поперечного потока тепла:

$$\mathbf{Q}_\perp = -C_1 D^2 \frac{nT}{B} \nabla_\perp T. \quad (11)$$

Для рассматриваемых турбулентных стационарных состояний плазмы в (11) отсутствует слагаемое, пропорциональное $\nabla_\perp n$, так как его сохранение привело бы в выражении для прироста энтропии слагаемого, пропорционального $(\nabla_\perp T, \nabla_\perp n)$, что допускало бы и эволюцию с отрицательным производством энтропии. Перпендикулярность $\nabla_\perp T$ и $\nabla_\perp n$ магнитному полю использована в последних рассуждениях, когда предполагалось, что $\nabla_\perp T$ и $\nabla_\perp n$ можно считать независимыми: при отсутствии такого магнитного поля в плазме возникнут макроскопические движения, выравнивающие давление и делающие ∇T и ∇n взаимозависимыми. Кроме того, для

турбулентных стационарных состояний ни при каких соотношениях между $\nabla_{\perp} T$ и $\nabla_{\perp} n$ "не включается" дополнительный источник производства энтропии, связанный с развитием новых неустойчивостей, поскольку в турбулентном стационарном состоянии уже учтены все возможные электростатические неустойчивости.

4. Устойчивость плазменного шнура в токамаке подразумевает, в частности, устойчивость баллонных мод, возбуждаемых широм. Известно, что именно баллонные неустойчивости будут доминировать в экспериментах с большими β и потому представляют особый интерес с точки зрения получения плазмы с высоким энерго-содержанием. Критерием устойчивости баллонных мод является неравенство [6, 7]

$$\frac{1}{2}S^2 + \alpha\epsilon \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) - \frac{1}{2}S\alpha^2 > 0, \quad (12)$$

где $\alpha = -8\pi p'(r)Rq^2(r)/B^2$, $\epsilon = r/R$.

Минимальному $D^2(r)$, обеспечивающему устойчивость баллонных мод, соответствует максимальная плотность тока, не приводящая к нарушению (12). Отбрасывая второе слагаемое в (12), при рассмотрении всех эффектов лишь в первом исчезающем порядке по a/R легко видеть, что (12) можно переписать в виде

$$S = \alpha^2 \quad (13)$$

и рассматривать, как дифференциальное уравнение первого порядка, позволяющее элементарно выразить $p(r)$ через $q(r)$. Используя (2) без второго слагаемого из-за (5) при учете (11), а также уже установленную зависимость $p(r)$ от $q(r)$, при заданном потоке тепла $Q(r)$ через поверхность с радиусом r , что определяется механизмом нагрева плазмы, получаем распределение температуры по плазменному шнуру в виде функционала от $q(r)$. Таким образом, мы получаем величины $n(r)$ и энтропии (см. (10)) как функционалы от $q(r)$. Варьирование энтропии при заданном количестве вещества $2\pi \int_0^a n(r)r dr$, приводит к нелинейной задаче на собственные значения описывающей пинчевание плазмы в токамаке.

5. В настоящей работе мы воспользуемся простым вариационным методом, который приводит к значительным упрощениям и позволяет составить правильное представление о структуре разряда в случае удачного выбора пробной функции.

Для описания разрядов с характерным пространственным масштабом r_0 ($r_0 \ll a$) будем искать $q(r)$ в виде

$$q(r) = q_0(1 + (r/r_0)^2), \quad (14)$$

то есть функции со свободными параметрами q_0 и r_0 .

Кроме того, для определения структуры разряда необходимо задать функцию $Q(r)$. Для определенности примем

$$Q(r) = Q_{Ohm}(r) + Q_0, \quad Q_{Ohm}(r) = 4\pi^2 R \int_0^r E j(r)r dr, \quad (15)$$

где $Q_0 = \text{const}$ – не зависящий от радиуса поток тепла, который можно интерпретировать как мощность, вносимую в центр плазменного шнура пучком нейтральной инжекции, а $Q_{Ohm}(r)$ – омический нагрев плазмы.

Простые вычисления по схеме, описанной в конце предыдущего раздела, с использованием (13)–(15) дают при $r_0/a \ll 1$

$$p(r) \sim 1/r^3, T(r) \sim 1/r, n(r) \sim 1/r^2 \text{ при } r > r_0. \quad (16)$$

Кроме того, при $Q_0 = 0$ для разрядов, описываемых выражением (14),

$$n(r)q(r) = \text{const}, \quad (17)$$

а при $Q_0 \neq 0$ соотношение (17) выполняется при $r > r_0$. Таким образом, при дополнительном нагреве, не слишком сильно превышающем омический, следует ожидать приближенного выполнения (17) при всех r .

Независимость произведения коэффициента запаса устойчивости на концентрацию от малого радиуса действительно наблюдалась экспериментально на токамаках TEXT и TFTR (см. обзор [8], где сделана попытка объяснить это, исходя из далеко небесспорных теоретических соображений, основанных на ТРР, хотя сам формализм ТРР является вполне обоснованным в конкретном круге задач, связанных с магнитными ловушками [9]).

Для коэффициента температуропроводности $\chi_{\perp}(r)$ на периферии шнура, согласно (2), (14), находим

$$\chi_{\perp} = C_1 D^2(r) \frac{cT(r)}{eB} \sim \left(\frac{r}{r_0}\right)^3, \quad r > r_0. \quad (18)$$

Рост температуропроводности на периферии плазменного шнура является надежно установленным экспериментально и принципиально важным явлением [10], не имеющим до настоящего времени теоретического объяснения. Заметим, что растущий по кубическому закону ($\chi \sim r^3$) на периферии плазмы коэффициент температуропроводности ранее успешно применялся для описания экспериментальных коэффициентов температуропроводности в L -режимах токамаков JET, D3-D, TFTR, JT-60U, RBX-M, TORE SUPRA [11].

Авторы выражают искреннюю благодарность В.Д.Шаfranову, обратившему их внимание на связь турбулентности и пинчевания, а также С.И.Анисимову за интерес к работе и полезное обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Совета по поддержке ведущих научных школ 96-15-96448 и 96-15-96815.

-
1. Б.В.Кадомцев, В.С.Мухоматов, В.Д.Шаfranов, *Физика плазмы* **9**, 5 (1983).
 2. А.В.Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей. Неустойчивости неоднородной плазмы*, т.2, М.: Атомиздат, 1977.
 3. С.Н.Гордиенко, *Физика плазмы* **23**, 754 (1997).
 4. С.Н.Гордиенко, *Физика плазмы* (1998), в печати.
 5. С.Н.Гордиенко, Э.И.Юрченко, *Физика плазмы* (1998), в печати.
 6. О.П.Погуце, Э.И.Юрченко, *Письма в ЖЭТФ* **28**, 344 (1978).
 7. О.П.Погуце, Э.И.Юрченко, *Вопросы теории плазмы*, вып. 11, М.: Энергтоиздат, 1982.
 8. В.В.Яньков, *УФН* **167**, 499 (1997).
 9. В.П.Пастухов, *Физика плазмы* **6**, 1003 (1980).
 10. С.В.Мирнов, *Физические процессы в плазме токамака*, М.: Наука, 1983.
 11. Ю.В.Готт, Э.И.Юрченко, *Физика плазмы* **20**, 853 (1996).