Письма в ЖЭТФ, том 67, вып.11, стр.951 - 958

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ, ИНВАРИАНТАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЫХНЕ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНЫХ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

В.Е.Архинчеев

Бурятский научный центр Сибирское отделение РАН

670047 Улан-Удэ, Россия

Поступила в редакцию 30 апреля 1998 г.

Определены неподвижные точки и инварианты преобразований Дыхне. Установлено их соответствие точным решениям и соотношениям дуальности для эффективных характеристик неоднородной среды. Рассмотрен методами теории бифуркаций вопрос об устойчивости точных решений для эффективной проводимости, являющихся неподвижными точками преобразований Дыхне, и дана классификация этих неподвижных точек по типу устойчивости. Показано, что эффективный тензор проводимости двухфазной среды в магнитном и переменном электрическом полях при определенных параметрах среды может быть неустойчивой точкой типа "седло".

PACS: 73.40.-c

1. Введение. Общий подход для изучения свойств двумерной двухфазной среды был развит в работах Дыхне [1, 2]. Он основан на инвариантности уравнений постоянного тока

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{e} = 0 \tag{1}$$

и закона Ома

$$\mathbf{j} = \tilde{\sigma}\mathbf{e} \tag{2}$$

относительно линейных преобразований поворота:

$$\mathbf{j} = aj' + ib\mathbf{e}', \quad \mathbf{e} = c\mathbf{e}' + id\mathbf{j}'. \tag{3}$$

Здесь векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{e}$ – электрические ток и поле, $\tilde{\sigma} = \sigma/(1 - i\beta)$ – тензор проводимости среды в магнитном поле, σ – проводимость, $\beta = \mu B$ – холловский фактор, μ – подвижность частицы, коэффициенты a, b, c и d – действительные. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости. После преобразований (3) в новой штрихованной системе также выполняется закон Ома, при этом получается следующее выражение для тензора проводимости штрихованной системы:

$$\tilde{\sigma}' = (b + ic\tilde{\sigma})/(d\tilde{\sigma} + ia). \tag{4}$$

Аналогичное выражение получается и для эффективного тензора проводимости штрихованной системы.

В результате использования этих преобразований были установлены эффективные характеристики случайно неоднородных двухфазных сред при равных концентрациях фаз. Дальнейшее развитие метод получил в работах [3, 4]. Были установлены соотношения дуальности и взаимнооднозначное соответствие (изоморфизм) между задачами проводимости двухфазной среды без и в магнитном поле. В работе [5] этот подход был использован для изучения квантового эффекта Холла в неоднородных средах. Для случайной смеси холловской ($\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xy} = \text{const}$) и металлической фаз были найдены эффективные характеристики системы в широком интервале концентраций. Во всем интервале концентраций, пока имеется протекание по холловской фазе, эффективные характеристики постоянны и равны значениям холловской фазы.

Целью настоящей статьи является изучение свойств преобразований Дыхне как дробно-линейных преобразований и рассмотрение вопроса устойчивости решений задачи проводимости. Дело в том, что формулу (4) можно рассматривать как дробно-линейное преобразование плоскости переменной Z на область образа W:

$$W = L(z) = (b + icZ)/(dZ + ia). \tag{5}$$

В первой части статьи найдены неподвижные точки этого преобразования и установлено их соответствие точным решениям задачи проводимости без и в магнитном поле. Также были найдены инварианты дробно-линейного преобразования (5) и показана их эквивалентность точным соотношениям дуальности. Вторая часть статьи посвящена вопросу устойчивости точных решений задач проводимости вблизи неподвижных точек и проведена их классификация по типу устойчивости относительно изменений параметров двухфазной среды. В качестве примера изучена устойчивость решений задачи о проводимости в магнитном и переменном электрическом полях.

2. Неподвижные точки преобразований Дыхне и их эквивалентность точным решениям задач проводимости. Найдем возможные неподвижные точки преобразования (5). Они определяются из уравнения

$$dZ^2 + i(a - c)Z - b = 0. \tag{6}$$

Здесь $Z = X + iY$ – комплексная величина.

Исследуем простейший случай $a = c = 0$. Тогда неподвижная точка имеет только действительную часть и оказывается вырожденной:

$$X = \pm(b/d)^{1/2}, \quad Y = 0. \tag{7}$$

Выбрав в качестве переменной Z эффективную проводимость без магнитного поля и определив соответствующим образом коэффициенты b и d, получим выражение для эффективной проводимости двухфазной среды на пороге протекания (при равных концентрациях фаз):

$$\sigma_e = (\sigma_1\sigma_2)^{1/2}. \tag{8}$$

Таким образом, неподвижная точка (7) соответствует хорошо известному решению [1].

Рассмотрим двухфазную среду, помещенную в магнитное поле. В этом случае надо использовать полные преобразования, все коэффициенты отличны от нуля. Однако при равенстве коэффициентов a и c: $a = c$ опять получим неподвижную точку преобразования вида (7). Но в этом случае она соответствует иному решению. Выберем в качестве переменной Z эффективный тензор проводимости в магнитном поле: $Z = \sigma_{xx} + \sigma_{xy}$. Тогда, согласно (7), имеем

$$\sigma^e_{xx} = (b/d)^{1/2}, \quad \sigma^e_{xy} = 0. \tag{9}$$

Из (9) следует, что эффективный тензор проводимости системы, помещенной в магнитное поле, тем не менее может иметь диагональный вид. Другими словами, задача о проводимости двухфазной двумерной среды в магнитном поле сводится к задаче о проводимости такой же системы без магнитного поля на пороге протекания (когда эффективные характеристики оказываются постоянными величинами). При произвольных концентрациях изоморфизм был установлен иным способом в работе [4].

Предположим, что переменная Z имеет только мнимую часть: $Z = iY$. В этом случае неподвижные точки преобразований (5) определяются соотношениями (детерминант уравнения (6) предполагается отрицательным)

$$X = 0, \quad Y = -(a-c) \pm [4bd + (a-c)2]^{1/2}/2d. \tag{10}$$

Переменной Z в этом случае будет соответствовать эффективный тензор проводимости, имеющий только недиагональную компоненту,

$$\sigma^e_{xx} = 0, \quad \sigma^e_{xy} = \text{const}. \tag{11}$$

Два решения для σ_{xy} отражают две возможности протекания тока по фазе 1 или 2 в зависимости от концентрации фазы. Решение (11) с неподвижной точкой типа (10) получается в двух физических ситуациях. Одно из них было получено автором и Э.Г.Батыевым для случайной смеси холловской ($\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xy} = \text{const}$) и металлической фаз в широком интервале концентраций фаз, пока имеется протекание по холловской фазе [5]. Второе решение, аналогичное (11), получается для смеси двух холловских фаз при любых концентрациях [6].

В общем случае существуют две неподвижные точки:

$$Z = i(a-c) \pm [4bd - (a-c)2]^{1/2}/2d. \tag{12}$$

Здесь детерминант положительно определен.

Выбрав в качестве переменной Z эффективный тензор проводимости, в магнитном поле получим решения, соответствующие неподвижной точке (12):

$$\sigma^e_{xx} = [4bd - (a-c)2]^{1/2}/2d, \quad \sigma^e_{xy} = (c-a)/2d. \tag{13}$$

Нетрудно понять, что постоянные решения для компонент эффективного тензора проводимости соответствуют решениям на пороге протекания:

$$\sigma^2_e = \sigma_1\sigma_2/(1 + (\sigma_1\beta_2 - \sigma_2\beta_1)^2, \;\; \beta^2_e = \sigma^2_e(\beta_1 + \beta_2)/(\sigma_1 + \sigma_2), \tag{14}$$

см, например, [2, 6].

Однако есть еще одно физическое решение, соответствующее неподвижной точке (12), – это однородная среда:

$$\sigma^e_{xx} = \sigma_{xx}, \;\; \sigma^e_{xy} = \sigma_{xy}. \tag{15}$$

Оно имеет место во всем интервале концентраций. Можно показать, что случайно неоднородная двухфазная среда в магнитном поле изоморфна однородной среде при равенстве холловских концентраций

$$\sigma_1/\beta_1 = \sigma_2/\beta_2. \tag{16}$$

В частности, это следует из результатов работы [6].

Рассмотрим трехмерный случай. Преобразования (3) в этом случае используются в усеченном виде с коэффициентом $d = 0$. Для преобразования W получим:

$$iaW = b + icZ. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что в трехмерном случае есть только одна неподвижная точка преобразований:

$$Z = ib/2c \quad (c = -a) \tag{18}$$

с решением, соответствующим образованию бесконечного кластера из бездиссипативной холловской фазы:

$$\sigma^e_{xx} = \sigma^e_{yy} = \sigma^e_{zz} = 0, \quad \sigma^e_{xy} = b/2c. \tag{19}$$

Таким образом, рассмотрены все неподвижные точки преобразований Дыхне в двумерном и трехмерном случаях. Показано, что каждая из установленных неподвижных точек соответствует некоторому точному решению задачи об эффективной проводимости при выборе в качестве переменной преобразований эффективной проводимости или тензора проводимости в магнитном поле. Перечислим эти решения. Первые два решения – проводимость без магнитного поля и тензор проводимости в магнитном поле – были получены Дыхне [1, 2]. Третье решение – изоморфизм между задачами о гальваномагнитных свойствах и задачей о проводимости – было найдено Балагуровым [5]. Четвертое решение об эффективной проводимости смеси холловской и металлической фаз во всем интервале концентраций, пока имеется протекание по холловской фазе, было получено автором и Батыевым [5]. Частным случаем этой задачи является смесь двух холловских фаз [6]. Пятое решение – эквивалентность двухфазной среды в магнитном поле при равенстве холловских концентраций (15) однородной среде и шестое решение для смеси холловских фаз в трехмерном случае (19) получены, по-видимому, впервые. Следовательно, точные решения задачи о проводимости можно классифицировать по их соответствию неподвижным точкам преобразований Дыхне.

3. Инварианты дробно-линейных преобразований Дыхне. Как известно, дробно-линейные преобразования, к которым относятся и преобразования Дыхне для проводимости, определяются заданием трех точек Z_i и их образов W_i $(i = 1, 2, 3)$. Согласно общей теории дробно-линейных преобразований, они также характеризуются инвариантностью двойного отношения четырех точек [7]:

$$(Z - Z_1)/(Z - Z_2) : (Z_3 - Z_1)/(Z_3 - Z_2) = (W - W_1)/(W - W_2) : (W_3 - W_1)/(W_3 - W_2). \tag{20}$$

Выясним физический смысл этих инвариантов. Рассмотрим случайно неоднородную двухфазную среду. Пусть переменная Z равна эффективной проводимости $\sigma_e(\epsilon)$ (где $\epsilon = X - 1/2$ – отклонение от порога протекания), а точки равны: $Z_1 = \sigma_1$, $Z_2 = \sigma_2$, $Z_3 = (\sigma_1\sigma_2)^{1/2}$. В качестве образа выберем систему, отличающуюся от исходной заменой фаз местами: $W = \sigma'_e(\epsilon) = \sigma_e(-\epsilon)$, $W_i = \sigma_1\sigma_2/\sigma_i$ $(i = 1, 2)$, $W_3 = (\sigma_1\sigma_2)^{1/2}$. Тогда после несложных вычислений получим, что инвариант (20) для этого преобразования соответствует известному соотношению дуальности

$$\sigma_e(\epsilon)\sigma_e(-\epsilon) = \sigma_1\sigma_2. \tag{21}$$

Перейдем к изучению инвариантов для двухфазной системы, помещенной в магнитное поле. В этом случае проводимости надо заменить на соответствующие тензоры проводимости. Как отмечалось ранее [6], существуют, как минимум, три преобразования для штрихованной системы.

1. Преобразованная система отличается от исходной заменой фаз местами:

$$W = \tilde{\sigma}'(\epsilon) = \tilde{\sigma}(-\epsilon), \quad W_i = \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2/\tilde{\sigma}_i, \quad \sigma_i' = \sigma_1\sigma_2/\sigma_i,$$

$\beta_i' = \beta_1\beta_2/\beta_i$, $i = 1,2$, образ $W_3 = \sigma_e(0)$ равен эффективному тензору проводимости на пороге протекания. В этом случае инвариант (20) оказывается эквивалентным следующему соотношению дуальности между эффективными проводимостью и холловским фактором:

$$(\sigma_e(\epsilon) + \sigma_e(-\epsilon))/(\sigma_1 + \sigma_2) = (\beta_e(\epsilon) + \beta_e(-\epsilon))/(\beta_1 + \beta_2). \tag{22}$$

2. Для преобразования с заменой фаз местами и изменением направления магнитного поля:

$$W_i = \tilde{\sigma}_1^*\tilde{\sigma}_2^*/\tilde{\sigma}_i^*, \quad \sigma_i' = \sigma_1\sigma_2/\sigma_i,$$

$$\beta_i' = -\beta_1\beta_2/\beta_i, \quad i = 1,2, \quad W_3 = \tilde{\sigma}_e(0)$$

из инварианта (20) получим еще одно соотношение дуальности для эффективных характеристик:

$$(\sigma_e(\epsilon) - \sigma_e(-\epsilon))/(\sigma_1 - \sigma_2) = (\beta_e(\epsilon) - \beta_e(-\epsilon))/(\beta_1 - \beta_2) \tag{23}$$

Здесь $\tilde{\sigma}^*$ – комплексно сопряженный тензор проводимости.

3. При третьем преобразовании, когда меняется только направление магнитного поля и $W_i = \tilde{\sigma}_i^*$ $(\sigma_i' = \sigma_i, \beta_i' = -\beta_i)$, $i = 1,2$, $W_3 = \tilde{\sigma}_e(0)$, из инварианта двойного отношения четырех точек получается соотношение между компонентами эффективного тензора проводимости

$$(\sigma_{xx}^e)^2 + (\sigma_{xy}^e)^2 + 2c\sigma_{xy} - b = 0. \tag{24}$$

Следовательно, инварианты двойного отношения при надлежащем выборе переменной Z и точек Z_i $(i = 1,2,3)$ и их образов W и W_i соответствуют соотношениям (22), (23) и (24).

Кратко обсудим полученные результаты. На основе общего подхода изучены свойства преобразований Дыхне как дробно-линейных конформных преобразований. Найдены неподвижные точки и инварианты этих преобразований. На основе анализа неподвижных точек установлено их соответствие точным решениям задачи об эффективной проводимости, найдены еще два точных решения.

4. Об устойчивости решений задач проводимости в магнитном поле. Рассмотрим вопрос устойчивости установленных точных решений относительно изменений параметров фаз: проводимостей и холловских факторов. Другими словами, будет изучена устойчивость неподвижных точек и проведена их классификация по типу устойчивости.

Для изучения устойчивости представим преобразование (6) в виде конечно-разностного уравнения:

$$Z_{n+1} - Z_n = (b + icZ_n)/(dZn + ia) - Z_n, \tag{25}$$

то есть в качестве образа W выбирается значение после $(n+1)$ преобразования. Соответственно, для реальной X и мнимой Y частей получим нелинейную систему уравнений:

$$X_{n+1} = X_n[(ac+bd)/(X_n^2d^2 + (Y_nd+a)^2)],$$
$$\tag{26}$$
$$Y_{n+1} = [(X_n^2+Y_n^2)cd + Y_n(ac-bd) - ab]/(X_n^2d^2 + (Y_nd+a)^2).$$

Исследование этой системы будет проведено с использованием методов теории бифуркации [8]. Левую часть представим в виде производной по времени - по числу преобразований, а правую линеаризуем вблизи неподвижных точек:

$$X_n = X_0 + \eta, \quad Y_n = Y_0 + \xi.$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} S\eta \\ S\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \tag{27}$$

где элементы матрицы равны

$$A_{11} = -1 + (ac+bd)K - 2X_0d^2K^2,$$

$$A_{12} = -2(ac+bd)(Y_0d+a)K,$$

$$A_{21} = 2X_0cd - 2X_0d^2[(X_0^2+Y_0^2)cd + Y_0(ac-bd) - ab]K^2,$$

$$A_{22} = (2Y_0cd + ac - bd)K - 2(Y_0d+a)[(X_0^2+Y_0^2)cd + Y_0(ac-bd) - ab]K^2 - 1,$$

$$K^{-1} = X_0^2d^2 + (X_0d+a)^2.$$

Значения X_0 и Y_0 для каждой неподвижной точки свои.

Вначале изучим устойчивость неподвижной точки типа (7) $(a=c)$. В этом случае элементы матрицы существенно упрощаются:

$$A_{11} = 2b^{1/2}d^{3/2}K, \quad A_{12} = -2aK,$$

$$A_{21} = -2cb^{3/2}d^{1/2}K, \quad A_{22} = 2bdK.$$

Найдем собственные значения S. Как известно, устойчивость решения определяется знаком $\mathrm{Re}(S)$. В нашем случае они равны

$$2S_{1,2} = -(A_{11}+A_{22}) \pm [(A_{11}+A_{22})^2 - A_{12}A_{21}]^{1/2}. \tag{28}$$

Обоим отрицательным значениям соответствует устойчивая точка типа "узел" по классификации теории бифуркации [8]. Как следует из (23), точное решение для эффективной проводимости двухфазной среды без магнитного поля (8) как раз является такой точкой типа "узел".

Проанализируем поведение вблизи неподвижной точки (11), которая соответствует эффективной проводимости неоднородной среды в условиях КЭХ. В этом случае $b^*d = 1$ и, соответственно, собственные значения равны:

$$S_1 = -2/(1+a^2), \quad S_2 = -1 - i(2ab - a^2 - 1)/(1+a^2)^{3/2}. \tag{29}$$

При $a = 1$ решение для эффективной проводимости в условиях КЭХ устойчиво по типу "узел": $S_1 = S_2 = -1$, как и следовало ожидать.

В общем случае, когда имеются обе компоненты тензора эффективной проводимости, в магнитном поле получим для элементов матрицы A в неподвижных точках (12) значения

$$A_{11} = -2(a^2 + d(db - a^2K^{-1/2})K, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21} = \text{const}, \quad A_{22} = -2dbK.$$

Следовательно, собственные значения параметра S определяются диагональными элементами матрицы A. В зависимости от параметров среды возможны следующие типы поведения для неподвижных точек: "узел" и "седло". Неустойчивую точку типа "седло" можно получить, меняя численные значения коэффициентов a, b и d, то есть изменяя величины параметров σ и β двухфазной среды в магнитном поле.

Обсудим полученные результаты. Как следует из вышеизложенных решений, точные решения для эффективной проводимости двухфазных сред без магнитного поля и сред в условиях КЭХ (бездиссипативных холловских фаз) оказываются абсолютно устойчивыми при любых параметрах фаз – являются неподвижными точками типа "узел". В то же время эффективный тензор проводимости двухфазных сред в магнитном поле на пороге протекания и задача изоморфизма сред без и в магнитном поле могут быть при некоторых параметрах сред неподвижными точками типа "седло", то есть будут неустойчивыми. Этот вывод о неустойчивости эффективного тензора проводимости находится в соответствии с недавними результатами работ [9, 10], где было указано на ограниченность линейного приближения в задачах проводимости в неоднородных средах, утверждение об ограниченности линейного подхода также содержится в работе [11].

5. Об устойчивости эффективной проводимости в переменном электрическом поле. В этом разделе мы рассмотрим вопрос об устойчивости эффективной среды в переменном электрическом поле при равных концентрациях фаз.

Пусть первая фаза состоит из сопротивления и индуктивности, а вторая фаза – из сопротивления и емкости, то есть проводимости фаз считаются равными:

$$\hat{\sigma}_1 = \sigma_1 + i\omega L; \quad \hat{\sigma}_2 = \sigma_2 + 1/i\omega C.$$

Используя преобразования для такой среды, получим для эффективной проводимости преобразованной системы на частоте:

$$\sigma'_e = [(\sigma_1 + i\omega L)(\sigma_2 + 1/i\omega C)]/\sigma_e, \tag{30}$$

то есть получим дробно-линейное преобразование в виде

$$W = \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2/Z. \tag{31}$$

Оно имеет неподвижную точку типа (7):

$$Z_0 = (\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2)^{1/2}. \tag{32}$$

При этом для величин X_0 и Y_0 получим следующие выражения:

$$(X_0)^2 + (Y_0)^2 = C, \quad A^2 + B^2 = C^2, \quad Y_0/X_0 = \text{tg}(\varphi). \tag{33}$$

Здесь $A = \mathrm{Re}(\sigma_e^2)$, $B = \mathrm{Im}(\sigma_e^2)$ из (27).

Далее исследуем устойчивость неподвижной точки (28) описанным выше способом. После вычислений, аналогичным сделанным выше, получим:

$$S_{1,2} = -1 + (A \pm iB)\exp(\pm 2i\varphi)/C. \tag{34}$$

Таким образом, в зависимости от величин A, B и $\mathrm{tg}(\varphi)$ устойчивость точного решения для эффективной проводимости на частоте возможна трех типов: "узел", "седло" и "фокус", согласно (34). Вид устойчивости зависит как от параметров среды, так и от частоты переменного электрического поля.

Рассмотрим малые частоты, меньшие любых характерных частот задачи. В этом случае $B < 0$ (основной вклад в проводимость второй фазы дает емкостной ток) и $B \approx C$. После соответствующих вычислений можно убедиться в том, что неподвижная точка (33), соответствующая эффективной проводимости среды на частоте, на малых частотах оказывается устойчивой по типу "узел", и тем самым решается вопрос вообще о существовании эффективной проводимости на малых частотах (на больших временах). На больших временах в неоднородной среде происходит самоусреднение макроскопических величин. В качестве характерного времени выступает время, обратное $\mathrm{Re}(\sigma_e)$.

Полученные результаты качественного анализа устойчивости решений согласуются с результатами численного решения уравнений вида (22) для преобразования (32) при различных численных значениях величин A и B. Результаты численного решения уравнений для эффективных характеристик в магнитном поле и на частоте будут изложены в подробной статье.

В заключение автор выражает благодарность Ю.Б.Башкуеву и А.П.Семенову за поддержку настоящих исследований.

1. А.М.Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. А.М.Дыхне, ЖЭТФ **59**, 641 (1970).
3. Б.Я.Балагуров, ЖЭТФ **108**, 2202 (1995).
4. Б.Я.Балагуров, ЖЭТФ **82**, 1333 (1982).
5. В.Е.Архинчеев, Э.Г.Батыев, Solid State Comm. **72**, 1059 (1989).
6. В.Е.Архинчеев, Physica Stat. Sol. **161**, 815 (1990).
7. А.И.Маркушевич, *Краткий курс теории аналитических функций*, М.: Наука, 1978.
8. Ф.Мун, *Хаотические колебания*, М.: Мир, 1990.
9. А.М.Дыхне, В.В.Зосимов, С.А.Рыбак, Доклады АН **345**, 467 (1995).
10. А.М.Сатанин, В.В.Скузоваткин, Письма в ЖЭТФ **66**, 215 (1997).
11. В.Е.Архинчеев, Письма в ЖЭТФ **67**, 518 (1998).