Письма в ЖЭТФ, том 67, вып.12, стр.1015 - 1020 © 1998г. 25 июня

ГАМИЛЬТОНОВСКАЯ ДИНАМИКА ВИХРЕВЫХ ЛИНИЙ В СИСТЕМАХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Е.А.Кузнецов, В.П.Рубан

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 марта 1998 г.

После переработки 30 апреля 1998 г.

Показано, что представление завихренности $\mathbf{\Omega}$ в терминах вихревых линий снимает с неканонической скобки Пуассона [3], действующей на пространстве бездивергентных векторных полей, вырождение, связанное с вмороженностью ротора скорости. С помощью данного представления удается проинтегрировать уравнение движения завихренности для системы с гамильтонианом $\mathcal{H} = \int |\mathbf{\Omega}| d\mathbf{r}$.

PACS: 47.15.Hg, 47.32.Cc, 52.30-q

1. Гамильтоновскому описанию идеальной гидродинамики посвящено значительное количество работ (см., например, обзор [1] и ссылки там). Впервые этот вопрос был рассмотрен еще Клебшем (ссылку можно найти в книге [2]), который ввел для описания непотенциальных течений несжимаемой жидкости пару переменных λ и μ (названных впоследствии переменными Клебша). Динамика жидкости в этих переменных такова, что вихревые линии представляют собой пересечение поверхностей $\lambda = \mathrm{const}$ и $\mu = \mathrm{const}$, а сами переменные, являясь канонически сопряженными величинами, переносятся вместе с жидкостью. Однако эти переменные, как известно (см., например, [3]), описывают лишь частный тип течений. Если λ и μ однозначные функции координат, то степень зацепления вихревых линий, характеризующаяся инвариантом Хопфа [4], тождественно равна нулю. Для произвольных течений гамильтоновская формулировка уравнений несжимаемой идеальной гидродинамики была дана Арнольдом [5]. Уравнение Эйлера для ротора скорости $\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}\mathbf{v}$

$$\partial\mathbf{\Omega}/\partial t = \mathrm{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}] \equiv -(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{\Omega} + (\mathbf{\Omega}\nabla)\mathbf{v}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

записывается в гамильтоновской форме

$$\partial\mathbf{\Omega}/\partial t = \{\mathbf{\Omega}, \mathcal{H}\} \tag{2}$$

посредством неканонической скобки Пуассона [3]

$$\{F, G\} = \int (\mathbf{\Omega}\,[\mathrm{rot}(\delta F/\delta\mathbf{\Omega}) \times \mathrm{rot}(\delta G \delta\mathbf{\Omega})])\, d\mathbf{r} \tag{3}$$

и гамильтониана $\mathcal{H}_h = (1/2)\int \mathbf{\Omega}\Delta^{-1}\mathbf{\Omega} d^3\mathbf{r}$, совпадающего с энергией жидкости.

Несмотря на то, что скобка (3) позволяет описывать течения с произвольной топологией, ее главным недостатком является вырожденность. В силу этого оказывается невозможным сформулировать вариационный принцип на всем пространстве $\mathcal{S}$ бездивергентных векторных полей.

Причина вырожденности – наличие казимиров, обнуляющих скобку, – связана с существованием специальной симметрии, образующей целую группу – группу переобозначений лагранжевых маркеров (подробно об этом см. [7, 1]). Эта симметрия порождает все известные законы сохранения завихренности. Главным из них является закон вмороженности вихревых линий в жидкость. Этому отвечает локальный лагранжев инвариант - инвариант Коши. В предлагаемой работе рассмотрен способ разрешения вырождения неканонических скобок Пуассона путем введения новых переменных - лагранжевых меток, нумерующих каждую вихревую линию. В основе этого подхода лежит интегральное представление условия вмороженности ротора скорости, позволяющее перейти к новым объектам – вихревым линиям. Данный подход, использующий смешанное лагранжево-эйлеровое описание, позволяет записать вариационный принцип и достаточно просто рассмотреть предел тонких вихревых нитей. С помощью введенной гамильтоновской структуры удается проинтегрировать трехмерное уравнение Эйлера (2) с гамильтонианом $\mathcal{H} = \int |\mathbf{\Omega}| d\mathbf{r}$. В терминах вихревых линий данный гамильтониан распадается на совокупность гамильтонианов невзаимодействующих вихревых линий. При этом динамика каждой линии описывается уравнением вихревой индукции, которое с помощью преобразования Хасимото [7] сводится к интегрируемому одномерному нелинейному уравнению Шредингера.

2. Рассмотрим гамильтонову динамику бездивергентного векторного поля $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t)$, задаваемую с помощью скобки Пуассона (3) с некоторым гамильтонианом $\mathcal{H}$:

$$\partial\mathbf{\Omega}/\partial t = \mathrm{rot}\left[\mathrm{rot}(\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{\Omega}) \times \mathbf{\Omega}\right]. \tag{4}$$

Как уже отмечалось, скобка (3) вырождена, в силу чего оказывается невозможным сформулировать вариационный принцип на всем пространстве $\mathcal{S}$ бездивергентных векторных полей. Известно [1], что казимиры f, обнуляющие скобку, выделяют в $\mathcal{S}$ инвариантные многообразия $\mathcal{M}_f$ (симплектические листы), на каждом из которых можно ввести обычную гамильтонову механику и соответственно записать вариационный принцип. Покажем, что для уравнений (4) все связи, обусловленные казимирами, могут быть разрешены с помошью свойства вмороженности поля $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t)$.

Каждому гамильтониану $\mathcal{H}$ – функционалу от $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t)$ – будем ставить в соответствие обобщенную скорость

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}(\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{\Omega}). \tag{5}$$

Из сравнения уравнения (1) с уравнением для касательного вектора $\mathbf{R}_{s_0}$ к вихревой линии,

$$[\partial/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)]\mathbf{R}_{s_0} = (\mathbf{R}_{s_0}\nabla)\mathbf{v}, \tag{6}$$

где s_0 - лагранжевая переменная, маркирующая частицы вдоль вихревой линии, следует свойство вмороженности силовых линий поля $\mathbf{\Omega}$ в некую субстанцию, скорость переноса которой есть $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Сама обобщенная скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, однако, определена с точностью до продольной по $\mathbf{\Omega}$ компоненты: в уравнении (4) можно совершить замену

$$\mathrm{rot}(\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{\Omega}) \to \mathrm{rot}(\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{\Omega}) + \alpha\mathbf{\Omega},$$

которая никак его не изменит. При условии $(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla\alpha) = 0$ новая обобщенная скорость будет иметь нулевую дивергенцию, а уравнение вмороженности (4) и уравнение (6) можно будет переписать уже для новой $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Очевидно, что прежний параметр s_0 уже не будет маркировать частицы вдоль линии - необходим новый параметр s. Изменению калибровки обобщенной скорости соответствует добавление в гамильтониан некоторого казимира: $\mathcal{H} \to \mathcal{H} + f$; $\{f, .\} = 0$. Из сказанного становится понятным, что трансформация $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\mathbf{a}, t)$ начального расположения "жидких" частиц $\mathbf{R}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{a}$, осуществляемая полем обобщенной скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, определена неоднозначно в силу неоднозначности определения $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ с помощью (5).

Это утверждение находится в согласии с возможностью калибровочных преобразований в следующем общем выражении для $\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})$, фиксирующем все топологические свойства системы, определяемые начальным полем $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$:

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(\mathbf{a}, t))(\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}(\mathbf{a}, t)d^3\mathbf{a}. \tag{7}$$

Как нетрудно проверить, из условия $(\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})) = 0$ следует тождественное обращение в ноль дивергенции от выражения (7), причем равенство якобиана отображения $J = \det||\partial\mathbf{R}/\partial\mathbf{a}||$ единице не предполагается.

Калибровочное преобразование $\mathbf{R}(\mathbf{a}) \to \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{a}}_{\Omega_0}(\mathbf{a}))$ оставляет данный интеграл неизменным, если $\tilde{\mathbf{a}}_{\Omega_0}$ получается из $\mathbf{a}$ произвольным неоднородным сдвигом вдоль силовых линий поля $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$. Поэтому инвариантное многообразие $\mathcal{M}_{\Omega_0}$ пространства $\mathcal{S}$, на котором верен вариационный принцип, получается из пространства $\mathcal{R} : \mathbf{a} \to \mathbf{R}$ произвольных непрерывных взаимно- однозначных трехмерных отображений путем отождествления в $\mathcal{R}$ элементов, получающихся один из другого с помощью калибровочного преобразования с фиксированным соленоидальным полем $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$.

Интегральное представление для $\mathbf{\Omega}$ (7) есть другая формулировка условия вмороженности – из интегрирования соотношения (7) по площадке σ, трансверсальной к линиям $\mathbf{\Omega}$, следует неизменность во времени потока этого вектора: $\int_{\sigma(t)}(\mathbf{\Omega}, d\mathbf{S}_{\mathbf{r}}) = \int_{\sigma(0)}(\mathbf{\Omega}_0, d\mathbf{S}_{\mathbf{a}})$.

Важно также, что $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$ явно выражается через текущее значение завихренности и обратное отображение $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$. С помощью интегрирования по переменным $\mathbf{a}$ в соотношении (7) (ср.[1]),

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{R}) = J^{-1}(\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})\nabla_a)\mathbf{R}(\mathbf{a}), \tag{8}$$

$\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$ может быть представлено в виде: $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a}) = J(\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})\nabla)\mathbf{a}$. Эта формула есть выражение для лагранжевого инварианта Коши (см., например [2]). Отметим, что вектор $\mathbf{b} = (\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}(\mathbf{a})$ согласно (8) касателен $\mathbf{\Omega}(\mathbf{R})$. Естественно ввести параметр s как элемент дуги начальной вихревой линии $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$ так, что $\mathbf{b} = \Omega_0(\nu)\partial\mathbf{R}/\partial s$. В этом выражении Ω_0 зависит от поперечного параметра ν, маркерующего каждую вихревую линию. В соответствии с этим представление (7) записывается в виде

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \int \Omega_0(\nu)d^2\nu \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(s, \nu, t))\partial\mathbf{R}/\partial s ds, \tag{9}$$

откуда смысл новых переменных становится более прозрачным: каждой вихревой линии ν соответствует замкнутая линия $\mathbf{r} = \mathbf{R}(s, \nu, t)$, а сам интеграл (9) есть сумма по вихревым линиям. Отметим, что параметризация путем введения s и ν является локальной.. Поэтому как глобальное, представление (9) годится только для распределений с замкнутыми вихревыми линиями.

Чтобы получить уравнение движения для $\mathbf{R}(\nu, s, t)$, необходимо подставить представление (9) (в общем случае - (7)) в уравнение Эйлера (1) и совершить фурье-преобразование по координатам. В результате простого интегрирования имеем:

$$\left[\mathbf{k} \times \int \Omega_0(\nu)d^2\nu \int ds e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}}[\mathbf{R}_s \times \{\mathbf{R}_t(\nu, s, t) - \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)\}]\right] = 0.$$

Данное уравнение разрешим, полагая подынтегральное выражение тождественно равным нулю:

$$[\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t(\nu, s, t)] = [\mathbf{R}_s \times \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)]. \tag{10}$$

При таком выборе остается свобода в изменении параметра s и перемаркировке поперечных координат ν. В общем случае – произвольной топологии поля $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$ – вектор $\mathbf{R}_s$ в уравнении (10) следует заменить на вектор $\mathbf{b} = (\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}(\mathbf{a}, t)$.

Описание вихревых линий с помощью уравнений (9) и (10) является смешанным – лагранжево-эйлеровым – описанием: параметр ν имеет прозрачное лагранжевое происхождение, в то время как координата s остается эйлеровой.

3. Ключевое для формулировки вариационного принципа наблюдение заключается в том, что для функционалов, зависящих только от $\mathbf{\Omega}$, справедливо следующее общее равенство

$$[\mathbf{b} \times \mathrm{rot}\,(\delta F/\delta\mathbf{\Omega}(\mathbf{R}))] = \delta F/\delta\mathbf{R}(\mathbf{a})\Big|_{\mathbf{\Omega}_0}. \tag{11}$$

Поэтому правая часть уравнения (10) оказывается равной вариационной производной $\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{R}$:

$$[(\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}(\mathbf{a}) \times \mathbf{R}_t(\mathbf{a})] = \delta\mathcal{H}\{\mathbf{\Omega}\{\mathbf{R}\}\}/\delta\mathbf{R}(\mathbf{a})\Big|_{\mathbf{\Omega}_0}. \tag{12}$$

Далее легко проверятся, что полученное уравнение эквивалентно требованию экстремальности действия ($\delta S = 0$) с лагранжианом

$$\mathcal{L} = (1/3)\int d^3\mathbf{a}([\mathbf{R}_t(\mathbf{a}) \times \mathbf{R}(\mathbf{a})] \cdot (\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})\nabla_\mathbf{a})\mathbf{R}(\mathbf{a})) - \mathcal{H}(\{\mathbf{\Omega}\{\mathbf{R}\}\}). \tag{13}$$

Таким образом, мы ввели вариационный принцип для гамильтоновой динамики бездивергентного векторного поля, топологически эквивалентного $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$.

Обсудим некоторые свойства уравнения движения (12), связанные с избыточной параметризацией элементов из $\mathcal{M}_{\Omega_0}$ объектами из $\mathcal{R}$. Из (11) следует свойство ортогональности вектора $\mathbf{b}$ и $\delta F/\delta\mathbf{R}(\mathbf{a})$ для всех определенных на $\mathcal{M}_{\Omega_0}$ функционалов. Иными словами, вариационную производную от калибровочно инвариантных функционалов следует понимать (в частности в (11)) как $\hat{P}(\delta F/\delta\mathbf{R}(\mathbf{a}))$, где $\hat{P}_{ij} = \delta_{ij} - \tau_i\tau_j$ – проектор, а $\tau = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ есть единичный касательный вектор к вихревой линии. Используя это свойство, а также формулу перехода (11), можно путем прямого пересчета скобки (3) получить скобку Пуассона (между двумя калибровочно инвариантными функционалами), выраженную в терминах вихревых линий:

$$\{F, G\} = \int \frac{d^3\mathbf{a}}{|\mathbf{b}|^2}\left(\mathbf{b} \cdot \left[\hat{P}\frac{\delta F}{\delta\mathbf{R}(\mathbf{a})} \times \hat{P}\frac{\delta G}{\delta\mathbf{R}(\mathbf{a})}\right]\right). \tag{14}$$

Новая скобка (14) не содержит вариационных производных по $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$. Таким образом, по отношению к исходной скобке инвариант Коши $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{a})$ является казимиром, фиксирующем инвариантные многообразия $\mathcal{M}_{\Omega_0}$, на которых можно ввести вариационный принцип (13).

В случае гидродинамики сверхтекучей жидкости лагранжиан вида (13) по-видимому впервые был использован в работе Rasetti и Regge [8] для вывода уравнения движения отдельной вихревой нити, которое совпадает с уравнением (10). Впоследствии Воловик и Доценко (мл.) ([9]), основываясь на результатах [8], для непрерывного распределения вихрей получили скобки Пуассона между координатами вихрей и компонентами скорости. Выражения для этих скобок без труда могут быть извлечены из общего вида для скобок Пуассона (14). Однако, использование неканонических скобок Пуассона, полученных в работах [8, 9], требует определенной аккуратности. Прямое их применение дает для уравнения движения координаты вихревой нити не калибровочно инвариантный ответ. При общем изменении "продольного" параметра, зависящего от времени, в уравнении движения возникают дополнительные слагаемые, описывающие снос вдоль вихревой линии. Поэтому динамика кривых (в том числе и вихревых линий) принципиально является "поперечной" по отношению к самой кривой.

Отметим, что для двумерных (в плоскости $x - y$) течений вариационный принцип для действия с лагранжианом (13) приводит к хорошо известному факту, что $X(\nu, t)$ и $Y(\nu, t)$ координаты каждого вихря являются канонически сопряженными величинами (см. [2]).

4. Приведем пример уравнений гидродинамического типа (4), для которых переход к представлению вихревых линий позволяет установить их интегрируемость.

Рассмотрим гамильтониан

$$\mathcal{H}\{\mathbf{\Omega}(\mathbf{r})\} = \int |\mathbf{\Omega}| d\mathbf{r} \tag{15}$$

и следующее из него уравнение вмороженности (4) с обобщенной скоростью $\mathbf{v} = \operatorname{rot}(\mathbf{\Omega}/\Omega)$. Предположим, что вихревые линии замкнуты, и воспользуемся представлением (9). Тогда в силу (8) гамильтониан в терминах вихревых линий распадается на сумму гамильтонианов вихревых линий:

$$\mathcal{H}\{\mathbf{R}\} = \int |\Omega_0(\nu)| d^2\nu \int |\partial \mathbf{R}/\partial \mathbf{s}|\, ds. \tag{16}$$

Стоящий здесь интеграл по s представляет собой длину вихревой нити с индексом ν. Уравнение движения для вектора $\mathbf{R}(\nu, s)$ согласно (12) локально по этим переменным, оно не содержит взаимодействия с другими вихрями:

$$\eta[\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t(\nu, s, t)] = [\tau \times [\tau \times \tau_s]]. \tag{17}$$

Здесь $\eta = \operatorname{sign}(\Omega_0)$, $\tau = \mathbf{R}_s/|\mathbf{R}_s|$ – единичный касательный вектор к вихревой линии.

Это уравнение инвариантно относительно замен $s \to \tilde{s}(s, t)$. Поэтому уравнение (17) можно разрешить относительно $\mathbf{R}_t$ с точностью до сдвига вдоль вихревой нити – преобразования, неизменяющего завихренность $\mathbf{\Omega}$. Это означает, что для нахождения $\mathbf{\Omega}$ достаточно найти одно какое-либо решение следующего из (17) уравнения $\eta|\mathbf{R}_s|\mathbf{R}_t = [\tau \times \tau_s] + \beta \mathbf{R}_s$ при некотором значении β. Возникающее отсюда уравнение для τ как функции длины нити l ($dl = |\mathbf{R}_s| ds$) и времени t (при выборе нового значения $\beta = 0$) сводится к интегрируемому одномерному уравнению Ландау-Лифшица для гайзенберговского ферромагнетика:

$$\eta \frac{\partial \tau}{\partial t} = \left[\tau \times \frac{\partial^2 \tau}{\partial l^2}\right].$$

Это уравнение калибровочно эквивалентно нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) [10] и, например, может быть сведено к нему с помощью преобразования

Хасимото [7]: $\psi(l,t) = \kappa(l,t)\cdot\exp(i\int^l \chi(l,t)dl)$, где $\kappa(l,t)$ - кривизна, а $\chi(l,t)$ - кручение линии.

Рассматриваемая система с гамильтонианом (15) имеет прямое отношение к гидродинамике. Как известно (см. [7] и ссылки в этой работе), локальная аппроксимация для тонкой вихревой нити (при малости толщины нити к характерному продольному масштабу) приводит в гамильтониану вида (16) только для одной нити. Соответственно, уравнения (4) с гамильтонианом (15) можно использовать для описания движения нескольких вихревых нитей, толщины которых малы по сравнению с расстоянием между ними. При этом (нелинейная) динамика каждой нити независима от того, что происходит у соседей. В рамках этой модели появление особенностей (пересечение вихрей) имеет инерционный характер, весьма похоже на опрокидывание волн в газодинамике. Разумеется, данное приближение не работает на масштабах, сравнимых с расстоянием между нитями. Важно, что при данной аппроксимации гамильтониан вихревой нити пропорционален длине нити, из чего следует ее сохранение. Это, однако, ни в коей мере не адекватно поведению вихревых линий в турбулентных течениях, где происходит процесс их интенсивного вытягивания. Желательно поэтому иметь свободную от этого недостатка уточненную модель, обязательно учитывающую эффекты нелокальности.

К сказанному хотелось бы добавить, что список уравнений (4), интегрируемых с помощью представления (9), не исчерпывается (15). Так, система с гамильтонианом $H = \int |\Omega|\chi d\mathbf{r}$ также сводится к интегрируемой в терминах вихревых линий. Она оказывается калибровочно эквивалентной модифицированному уравнению КДВ $\psi_t + \psi_{lll} + (3/2)|\psi|^2\psi_l = 0$ - второму после НУШ уравнению из иерархии, порождаемой оператором Захарова-Шабата. В отличии от (15) физическое приложение данной модели пока не найдено.

5. Авторы благодарны А.Б.Шабату за полезные обсуждения связи НУШ и уравнений (4). Авторы благодарят также рецензента, указавшего на статьи [8, 9]. Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00093). Работа Е.К. частично была поддержана грантом INTAS 96-0413, а работа В.Р. – грантом Landau Scholarship.

---

1. В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов, УФН **167**, 1137 (1997).
2. H.Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, 1932; перевод – Г.Лэмб, *Гидродинамика*, М.: Гостехиздат, 1947.
3. E.A.Kuznetsov and A.V.Mikhailov, Phys. Lett. **77A**, **37** (1980).
4. J.J.Moreau, C.R.Acad. Sc. Paris **252**, 2810 (1961); H.K.Moffatt, J. Fluid Mech. **35**, 117 (1969).
5. В.И.Арнольд, ДАН СССР 162, 773 (1965); УМН **24**, N3, 225 (1969).
6. R.Salmon, Ann. Rev. Fluid Mech. **20**, 225 (1988).
7. R.Hasimoto, J. Fluid Mech. **51**, 477 (1972).
8. M.Rasetti and T.Regge, Physica **80A**, 217 (1975).
9. Г.Е.Воловик, В.С.Доценко (мл.), Письма в ЖЭТФ **29**, 630 (1979).
10. В.Е.Захаров, Л.А.Тахтаджян, ТМФ **38**, 26 (1979).