

П И С Ь М А
В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ
 ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД

ТОМ 65, ВЫПУСК 12
 25 ИЮНЯ, 1997

Письма в ЖЭТФ, том 65, вып.12, стр.855 - 860

© 1997г. 25 июня

О СИНГУЛЯРНОСТЯХ В НЕАБЕЛЕВЫХ ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

Д.В.Гальцов¹⁾, Е.Е.Донец, М.Ю.Зотов[□]*

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
 119899 Москва, Россия*

**Объединенный институт ядерных исследований
 141980 Дубна, Московская обл., Россия*

*□ НИИ ядерной физики Московского государственного университета им.
 М. В. Ломоносова
 119899 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 апреля 1997 г.

Исследуются сингулярности в сферически-симметричных черных дырах в теориях Эйнштейна–Янга–Миллса и Эйнштейна–Янга–Миллса с дилатоном для группы $SU(2)$. Представлены аналитические формулы, описывающие экспоненциально осциллирующее и степенное поведение метрики вблизи пространственноподобной сингулярности в решении общего вида.

PACS: 04.20.Jь, 11.15.Кс, 97.60.Lf

Черные дыры в теориях, включающих безмассовые неабелевы векторные поля [1], обнаруживают необычные свойства по сравнению с “классическими” вакуумными и электровакуумными черными дырами. Помимо нарушения теорем об отсутствии волос и теорем единственности, они демонстрируют существенно новый тип внутренней структуры [2]. В работе [3] было показано, что пространство-время внутри статической черной дыры общего вида в $SU(2)$ теории Эйнштейна–Янга–Миллса (ЭЯМ) не имеет горизонтов Коши, причем метрика осциллирует с амплитудой, бесконечно растущей при приближении к сингулярности. Хотя некоторые специальные решения все же могут иметь сингулярность типа Шварцшильда или Райсснера–Нордстрема (РН) [3], эти конфигурации образуют лишь множество меры нуль в пространстве всех решений. Внутри ЭЯМ черной дыры общего вида массовая функция испытывает

¹⁾ e-mail: galtsov@grg.phys.msu.su

последовательность экспоненциальных скачков и падений. Амплитуда пиков экспоненциально растет по мере приближения к сингулярности, в то время как продолжительность циклов стремится к нулю. Поведение системы вблизи сингулярности хорошо описывается двумерной динамической системой [3], из которой очевиден бесконечно-осциллирующий характер решения. Эти результаты были подтверждены в [4], о доказательстве существования решений типа РН заявлено в [5]. Целью настоящей работы является выяснение структуры сингулярности внутри статических сферических черных дыр общего вида в теориях ЭЯМ и ЭЯМ с дилатоном (ЭЯМД) (см. [6] и имеющиеся там ссылки).

Мы выбираем "струнное" значение константы связи дилатона и, не уменьшая общности, фиксируем единицы измерения и шкалу расстояний, в которых постоянная Планка и калибровочная константа равны единице:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \{-R + 2(\nabla\phi)^2 - e^{-2\phi} F^2\} \sqrt{-g} d^4x, \quad (1)$$

где F — поле $SU(2)$, соответствующее связности

$$A_\mu^a T_a dx^\mu = (W(\tau) - 1)(T_\phi d\theta - T_\theta \sin\theta d\phi),$$

T_ϕ и T_θ — сферические проекции генераторов $SU(2)$.

Интервал пространства-времени удобно представить в виде

$$ds^2 = \frac{\Delta\sigma^2}{r^2} dt^2 - \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2)$$

где функция $\Delta = r^2 - 2rm(r)$ внутри черной дыры общего вида отрицательна.

Уравнения движения для W, Δ, ϕ отделяются от уравнения для σ , и в общем случае ЭЯМД системы могут быть представлены в виде

$$\Delta U' - 2\Delta U \phi' = WV/r - \mathcal{F}W', \quad (3)$$

$$(\Delta/r)' + \Delta\phi'^2 = \mathcal{F} - 2\Delta U^2 e^{-2\phi} \quad (4)$$

$$(\Delta\phi')' + \Delta r\phi'^3 = \mathcal{F} - 2\Delta(\phi'r + 1)U^2 e^{-2\phi} - 1, \quad (5)$$

где

$$U = \frac{W'}{r}, \quad \mathcal{F} = 1 - \frac{V^2 e^{-2\phi}}{r^2}, \quad V = W^2 - 1.$$

Оставшееся уравнение для σ имеет вид

$$(\ln \sigma)' = r(\phi'^2 + 2U^2 e^{-2\phi}). \quad (6)$$

Решения типа черных дыр порождаются начальными данными на горизонте событий r_h , $W_h = W(r_h)$, $\phi_h = \phi(r_h)$, подчиняющимися условию $\mathcal{F}_h > 0$. Они могут быть охарактеризованы значениями АДМ массы M и дилатонного заряда $D = -\lim(\tau^2\phi')$ при $\tau \rightarrow \infty$. Единицы измерения для этих величин удобно фиксировать, потребовав $\phi(\infty) = 0$. Тогда условие асимптотической плоскостности приводит к тому, что обе величины W_h и ϕ_h принимают дискретный ряд значений. Для физических решений типа черных дыр $M > D$.

Начнем с изучения структуры сингулярности внутреннего пространства экспоненциально-осциллирующего типа для черных дыр общего вида в теории ЭЯМ. В этом случае система уравнений принимает вид

$$\Delta U' + \left(1 - \frac{V^2}{r^2}\right) W' = \frac{WV}{r}, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\Delta}{r}\right)' + 2\Delta U^2 = 1 - \frac{V^2}{r^2}, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dr^2} \ln \sigma = U^2. \quad (9)$$

При ее численном интегрировании от горизонта событий в направлении убывания радиальной координаты в общем случае (за исключением некоторых дискретных значений начальных данных на горизонте событий) начинаются осцилляции функции Δ , при развитии которых правая часть уравнения (7) становится пренебрежимо малой по сравнению с членами в левой части, и можно получить следующий приближенный первый интеграл системы:

$$Z = \Delta U \sigma / r = \text{const}, \quad (10)$$

связывающий осцилляции массовой функции и функции σ . Численные эксперименты также показывают, что в то время как ЯМ функция W имеет незначительную вариацию вплоть до $r=0$, ее производная все же отлична от нуля и очень быстро изменяется на некоторых весьма малых интервалах r . Функция U обнаруживает поведение, близкое к ступенчатому, будучи постоянной с высокой точностью в течение почти всего выбранного цикла осцилляций (рис. 1), и затем испытывающей скачкообразное изменение до более высокого абсолютного значения, отвечающего следующему циклу. Из (9) ясно, что σ экспоненциально спадает по мере уменьшения r , пока $U \approx \text{const}$, тогда как во время скачков U на весьма малых интервалах σ почти не изменяется. Таким образом, σ стремится к нулю через бесконечную последовательность экспоненциальных спаданий с возрастающими показателями на интервалах экспоненциально убывающей длины. В комбинации с (10) и указанными выше свойствами U это позволяет получить достаточно детальное описание поведения метрики.

Обозначим через r_k значение радиальной координаты, при котором Δ достигает k -го локального максимума. Вскоре после прохождения этой точки функция U стабилизируется на некотором значении U_k , приблизительно равном удвоенному значению в точке максимума (аналогично, при подходе к локальному максимуму U возрастает примерно в два раза, пока Δ почти стационарна). Тогда σ , в соответствии с (9), равна

$$\sigma(r) = \sigma(r_k) \exp [U_k^2 (r^2 - r_k^2)].$$

Из (10) находим, что до тех пор, пока $U_k \approx \text{const}$,

$$\Delta(r) = \frac{\Delta(r_k)}{r_k} r \exp [U_k^2 (r_k^2 - r^2)]. \quad (11)$$

Эта функция убывает с уменьшением r вплоть до достижения локального минимума в точке

$$R_k = \frac{1}{\sqrt{2} |U_k|} \approx \frac{\sqrt{|\Delta(r_k)|}}{2|V(r_k)|} r_k. \quad (12)$$

Далее, в силу того, что в процессе осцилляций функции Δ ЯМ функция W изменяется незначительно, будем считать $V = \text{const}$.

Таким образом, на этапе экспоненциального роста $|\Delta|$ массовая функция экспоненциально растет при перемещении влево от r_k до R_k . После прохождения точки R_k экспонента в (11) становится по порядку величины близкой к единице, поэтому Δ начинает возрастать линейно, а массовая функция $m(r)$

останавливается на значении $M_k = m(R_k)$. Такое поведение сохраняется до момента достижения величиной Δ/r^2 своего локального максимума, который имеет место при $\Delta \approx -V^2$ в точке

$$r_k^* \approx \frac{V^2}{|\Delta(r_k)|} r_k \exp[-(U_k r_k)^2]. \quad (13)$$

После этого наблюдается резкое убывание $|\Delta|$, вызывающее стремительное возрастание $|U|$. При этом член $2\Delta U^2$ в уравнении (8) становится пренебрежимо мал, вследствие чего на этом этапе

$$U\Delta \approx -V^2 U_k, \quad (14)$$

координата r при этом изменяется незначительно. Это приводит к тому, что функция Δ быстро достигает очередного локального максимума в точке $r_{k+1} \approx r_k^*$, а $m(r)$ резко спадает до m_{k+1} . В точке локального максимума Δ в уравнении (8) $|\Delta| \ll V^2$, и с учетом малости r находим

$$|U(r_k)| \approx \frac{|V|}{\sqrt{2|\Delta(r_k)|} r_k}. \quad (15)$$

Для получения оценок по порядку величины будем далее пренебрегать численными коэффициентами всюду, кроме показателей экспоненты, в частности, полагая $U(r_k) = U_k$, опуская также (квазипостоянные) множители V . С этой точностью из (11) - (15) получаем:

$$r_{k+1} = M_k^{-1}, \quad r_{k+1}^2 = R_k R_{k+1}, \quad M_k = \frac{R_k^2}{r_k^3} \exp\left(\frac{r_k^2}{2R_k^2}\right),$$

$$|\Delta(r_k)| = \left(\frac{R_k}{r_k}\right)^2, \quad \frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{r_k^2}{R_k^2} \exp\left[-\left(\frac{r_k^2}{2R_k^2}\right)\right].$$

Вводя переменную $x_k = (r_k/R_k)^2 (\gg 1)$, отсюда можно получить следующую рекуррентную формулу:

$$x_{k+1} = x_k^{-3} e^{x_k};$$

из которой видно, что x_k представляет собой экспоненциально расходящуюся последовательность. В терминах x_k имеем:

$$r_{k+1}/r_k = x_k e^{-x_k/2},$$

это отношение можно также понимать как отношение соседних периодов осцилляций, поскольку $r_k \gg r_{k+1}$. Значения функции $|\Delta|$ в точках r_k быстро стремятся к нулю

$$|\Delta(r_k)| = x_k^{-1},$$

так что мы имеем дело с бесконечной последовательностью "почти" горизонтов Коши при $r \rightarrow 0$. В то же время, значения $|\Delta|$ в точках R_k стремительно нарастают:

$$|\Delta(R_k)| = x_k^{-3/2} e^{x_k/2},$$

соответственно, значения массовой функции растут как

$$M_k/M_{k-1} = x_k^{-1} e^{x_k/2}.$$

Как было показано в [3], в этом режиме система (7), (8) может быть сведена к двумерной динамической системе, одной из особых точек которой является неустойчивый фокус с неограниченно раскручивающейся фазовой траекторией.

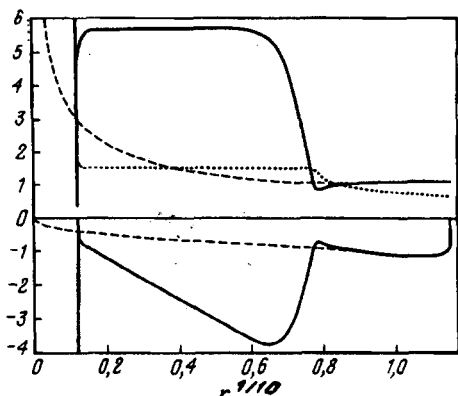


Рис.1.

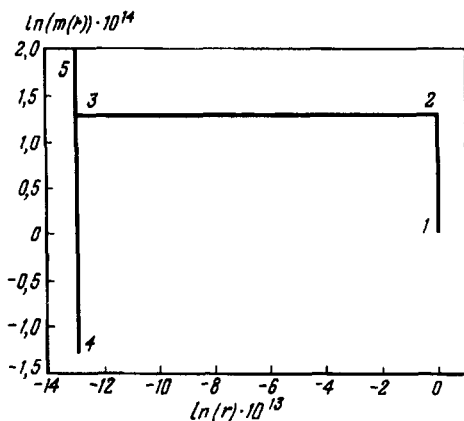


Рис.2.

Рис.1. Область первой осцилляции для ЭЯМ. В нижней полуплоскости – функции Δ для ЭЯМ (сплошная линия) и ЭЯМД (штриховая), в верхней – массовые функции $m(r)$ (аналогично) и функция U для ЭЯМ (пунктир). Значения всех функций взяты в степени $1/10$. $r_h = 4$; $W_h = -0.283993$ для системы ЭЯМ, $W_h = -0.298357$, $\phi_h = 0.05623$ для ЭЯМД (асимптотически плоские решения с одним нулем функции W во внешней области)

Рис.2. Вторая осцилляция массовой функции для системы ЭЯМ. Цифрами указана последовательность прохождения кривой при $r \rightarrow 0$. Параметры решения – см. рис. 1

Функция σ при уменьшении r от r_k до R_k быстро убывает до значения $\sigma_k = \sigma(R_k)$, которое затем сохраняется практически неизменным вплоть до r_{k+1} . Последовательность σ_k убывает при движении к сингулярности по закону

$$\sigma_{k+1}/\sigma_k = e^{-x_k/2}.$$

Рассмотрим теперь структуру сингулярности для черных дыр общего типа в теории ЭЯМД. В этом случае, начав численное интегрирование на горизонте, мы не встречаем гигантских осцилляций метрики во внутренней области. Общее решение также не обнаруживает горизонтов Коши, так что Δ остается отрицательно определенной при всех $0 < r < r_h$. Для достаточно малых r правые части уравнений (3) – (5) становятся малы по сравнению с членами в левой части, и мы получаем упрощенную систему уравнений:

$$(\ln U)' - 2\phi' = 0, \quad [\ln(\Delta/r)]' = [\ln(\Delta\phi')] = -r\phi'^2. \quad (16)$$

Ее интегрирование дает следующее пятипараметрическое (то есть общего вида) решение:

$$W = W_0 + br^{2(1-\lambda)}, \quad \Delta = -2\mu r^{(1-\lambda)^2}, \quad \phi = c + \ln(r^{-\lambda}) \quad (17)$$

с постоянными W_0, b, c, μ, λ . Справедливость усеченных уравнений (16) может теперь быть проверена подстановкой асимптотического решения (17) в полную систему (3) – (5). Для совместности достаточно выполнения условия $\sqrt{2} - 1 < \lambda < 1$, которое находится в согласии с численными данными.

Из (17) следует, что массовая функция расходится при $r \rightarrow 0$ по степенному закону:

$$m(r) = \mu r^{-\lambda^2}.$$

Дилатон расходится логарифмически, в то время как ЯМ функция W имеет конечный предел. Соответствующая функция σ стремится к нулю по закону

$$\sigma(r) = \sigma_1 r^{\lambda^2},$$

где $\sigma_1 = \text{const}$.

Описанные выше режимы соответствуют ожиданию, что сингулярность внутри черных дыр общего вида должна быть пространственноподобна. Метрика (2) во внутренней области черной дыры отвечает анизотропному космологическому решению Кантовского–Сакса. Можно показать, что соответствующий параметр деформации $\bar{\sigma}$, определяющий тензор деформаций $\sigma_{ij} = (2, -1, -1)\bar{\sigma}/3$, бесконечно растет при приближении к сингулярности. Для осциллирующего решения ЭЯМ значения $\bar{\sigma}$ в точках R_k имеют порядок

$$\bar{\sigma}_k^{\text{max}} \sim M_k^{1/2}/R_k^{3/2},$$

в то время как значения в точках r_k

$$\bar{\sigma}_k^{\text{min}} \sim M_{k-1}/R_{k-1}.$$

Обе последовательности являются неограниченно возрастающими. Для решения ЭЯМД расходимость $\bar{\sigma}$ степенная.

Таким образом, сферические неабелевы черные дыры *общего вида* соответствуют сильному принципу космической цензуры (сингулярность пространственноподобна). В случае теории ЭЯМ имеется, однако, бесконечная последовательность “почти” горизонтов Коши, в окрестности которых массовая функция начинает экспоненциально возрастать, стабилизируясь на значении, отвечающем следующему циклу; последовательность этих значений экспоненциально расходится при приближении к сингулярности. В теории с дилатоном массовая функция монотонно (степенным образом) стремится к бесконечности. В космологической интерпретации такое поведение метрики отвечает бесконечному росту анизотропии.

Д.В.Г. благодарит теоретический отдел ЦЕРН за гостеприимство в декабре 1996 г., когда работа была в процессе выполнения. Исследование проводилось при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 96-02-18899, 18126).

-
1. М.С.Волков, Д.В.Гальцов, Письма в ЖЭТФ 50, 312 (1989); ЯФ 51, 1171 (1990); Н.Р.Kunzle and А.К.М.Masood-ul-Alam, J. Math. Phys. 31, 928 (1990); P.Bizon, Phys. Rev. Lett. 64, 2844 (1990).
 2. Д.В.Гальцов, М.Ю.Зотов, *Внутреннее решение для черных дыр Эйнштейна – Янга – Миллса*, тез. докл. Международной школы–семинара “Основания гравитации и космологии”, Одесса, сентябрь 4–10, 1995, с. 19; *Новые асимптотики для уравнений Эйнштейна – Янга – Миллса*, тез. докл. 9 Российской гравитационной конференции, Новгород, июль 1996.
 3. Е.Е.Donets, D.V.Gal'tsov, and M.Yu.Zotov, *Internal Structure of Einstein-Yang-Mills Black Holes*, Preprint DTP-MSU/96-41, gr-qc/9612067.
 4. P.Breitenlohner, G.Lavrelashvili, and D.Maison, *Mass inflation and chaotic behavior inside hairy black holes*, MPI-PhT/97-20, gr-qc/9703047.
 5. J.A.Smoller and A.G.Wasserman, *Reissner-Nordström-like solution of the SU(2) Einstein-Yang-Mills equations*, gr-qc/9703062.
 6. D.V.Gal'tsov and E.E.Donets, Int. J. Mod. Phys. D3, 755 (1994).