Письма в ЖЭТФ, том 65, вып.12, стр.861 - 866 © 1997г. 25 июня

СУЩЕСТВУЕТ ЛИ ЭФФЕКТ УНРУ?

В.А.Белинский[*1)], *Б.М.Карнаков*, *В.Д.Мур*, *Н.Б.Нарожный*[+2)]

**INFN and ICRA, Rome University "La Sapienza"*
00185 Rome, Italy

+Московский государственный инженерно-физический институт,
115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 марта 1997 г.
После переработки 23 мая 1997 г.

Показано, что квантование на модах Фуллинга предполагает обращение поля в нуль на пространственных границах многообразия Риндлера. Поэтому пространство Риндлера физически не связано с пространством Минковского и состояние риндлеровского наблюдателя не может быть описано равновесной матрицей плотности при температуре Фуллинга-Унру. Следовательно, говорить об эффекте Унру не имеет смысла. Вопрос о поведении ускоренного детектора в физической постановке задачи остается открытым.

PACS: 03.70.+k, 04.70.Dy

1. Согласно Унру [1], детектор, движущийся равномерно ускоренно в плоском пространстве-времени, регистрирует частицы даже в вакууме. Точнее, эффект Унру означает, что риндлеровский (равномерно ускоренный) наблюдатель находится в термостате с температурой Фуллинга-Унру

$$T = \frac{g}{2\pi}, \tag{1}$$

где g – постоянное ускорение, измеренное в сопутствующей системе отсчета ($\hbar = c = 1$). Утверждается также [1-6], что для риндлеровского наблюдателя вакуумное состояние в пространстве Минковского (ПМ) описывается матрицей плотности с температурой (1). В силу аналогии с эффектом Хокинга [7] эта проблема носит принципиальный характер. Здесь мы для краткости обсудим ее на примере массивного скалярного поля в двумерном пространстве-времени. Обобщение на четырехмерный случай проводится непосредственно введением поперечных к направлению движения риндлеровского наблюдателя компонент импульса q и заменой $m \to (m^2 + q^2)^{1/2}$ (см., например, §12.1 в [5]).

2. Геометрия пространства Риндлера (ПР) определяется метрикой $ds^2 = \rho^2 d\eta^2 - d\rho^2$, $-\infty < \eta < \infty$, $\rho \geq 0$. При этом переменные в уравнении Клейна-Фока-Гордона (КФГ)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + G(\rho)\right)\phi_R(x) = 0, \qquad G(\rho) = -\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + m^2\rho^2, \qquad x = \{\eta, \rho\}, \tag{2}$$

разделяются, и для положительно-частотных относительно временной координаты η решений $\Phi_\mu(x)$, мод Фуллинга [8], имеем

$$\Phi_\mu(x) = \pi^{-1}(\mathrm{sh}(\pi\mu))^{1/2} K_{i\mu}(m\rho)\, e^{-i\mu\eta}, \qquad \mu > 0, \tag{3}$$

1) e-mail: volodia@vxrmg9.icra.it.
2) e-mail: narozhny@theor.mephi.msk.su.

где $K_\nu(y)$ – функция Макдональда. Эти моды ортогональны относительно скалярного произведения в ПР:

$$(\Phi_\mu, \Phi_{\mu'})_R \equiv i \int\limits_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \Phi_\mu^* (x) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial\eta}} \Phi_{\mu'} (x) = \delta (\mu - \mu') \tag{4}$$

и образуют (вместе с $\Phi_\mu^* (x)$) полную систему решений уравнения КФГ. Их можно использовать в качестве базиса для квантования поля ϕ_R:

$$\phi_R (x) = \int\limits_0^\infty d\mu \left(c_\mu \Phi_\mu (x) + c_\mu^+ \Phi_\mu^* (x)\right), \qquad \left[c_\mu, c_{\mu'}^+\right] = \delta (\mu - \mu'), \tag{5}$$

и определить вакуум в пространстве Риндлера соотношением $c_\mu|0_R >= 0$, $\mu \geq 0$:

$$c_\mu = (\Phi_\mu, \phi_R)_R = \frac{i}{\pi}(\mathrm{sh}(\pi\mu))^{1/2} \int\limits_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} K_{i\mu}(m\rho) \left[\frac{\partial \phi_R(\eta, \rho)}{\partial\eta} - i\mu\phi_R(\eta, \rho)\right]_{\eta=0}. \tag{6}$$

Дифференциальный оператор $G(\rho)$, собственными функциями которого являются решения (3), действует в гильбертовом пространстве одночастичных состояний со скалярным произведением $< \chi, \psi >= \int\limits_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \chi^* \psi$. Нетрудно убедиться в том, что самосопряженность этого оператора, обеспечивающая полноту и ортогональность мод (3), подразумевает выполнение граничного условия

$$\phi_R(\eta, 0) = 0. \tag{7}$$

При выполнении этого условия интеграл в (6) сходится абсолютно и величины c_μ^+, c_μ имеют смысл операторов рождения, уничтожения частиц. При нарушении условия (7) интегралу (6) все же можно придать формальный смысл, однако в этом случае c_μ становятся сингулярными при $\mu \to 0$. Это приводит к расходимостям в выражениях для физических величин и, следовательно, к невозможности рассматривать c_μ^+, c_μ как операторы рождения и уничтожения частиц. В частности, если $\phi_R(\eta, 0) = \mathrm{const} \neq 0$, то не существует оператор числа риндлеровских квантов $N_R = \int\limits_0^\infty c_\mu^+ c_\mu d\mu$.

Отметим, что замена переменной $\rho = e^u$, переводящая точку $\rho = 0$ в $u = -\infty$, сводит требование (7) к обычному условию исчезновения поля ϕ_R на пространственной бесконечности.

3. Замена переменных

$$t = \rho \mathrm{sh}\eta, \qquad z = \rho \mathrm{ch}\eta \tag{8}$$

приводит к метрике Минковского: $ds^2 = dt^2 - dz^2$. Глобальные координаты $\{t, z\}$ определены во всем ПМ, в то время как координаты Риндлера $\{\eta, \rho\}$ покрывают только один из его секторов (риндлеровский клин). Заметим, что якобиан преобразования (8) $J = \rho$ равен нулю на границе этого клина (в двумерном случае – на световом конусе $z^2 - t^2 = 0$).

Поскольку мировая линия равноускоренного наблюдателя в ПМ $z^2 - t^2 = g^{-2}$ совпадает с одной из орбит лоренцевых вращений, рассмотрим собственные функции генератора буста, имеющие интегральное представление [9] ($-\infty <$

$< \kappa < \infty$):

$$\Psi_\kappa(x) = 2^{-3/2}\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp\left\{-i[m(t\mathrm{ch}\theta - z\mathrm{sh}\theta) + \kappa\theta]\right\}. \tag{9}$$

Легко убедиться, что эти моды ортонормированы относительно обычного скалярного произведения $(\phi,\psi)_M$ в ПМ, образуют полную систему решений уравнения КФГ и могут быть использованы как базис для вторичного квантования[3]:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \left[b_\kappa \Psi_\kappa(x) + b_\kappa^+ \Psi_\kappa^*(x)\right], \left[b_\kappa, b_{\kappa'}^+\right] = \delta(\kappa - \kappa'). \tag{10}$$

Операторы b_κ взаимно однозначно связаны с операторами a_p, определенными на базисе плоских волн, $\Psi_p = (4\pi\epsilon)^{-1/2}\exp(-i\epsilon t + ipz), \epsilon = (p^2 + m^2)^{1/2}$, при этом

$$b_\kappa = \int_{-\infty}^{\infty} dp(2\pi\epsilon)^{-1/2}\exp(i\frac{\kappa}{2}\ln\frac{p_+}{p_-})a_p, \qquad p_\pm = \epsilon \pm p. \tag{11}$$

Отсюда видно, что решения $\Psi_\kappa(x)$ отвечают положительным частотам относительно глобального времени t, и для вакуума Минковского имеем $b_\kappa|0_M>= 0$, $-\infty < \kappa < \infty$.

Вводя нулевые координаты $x_\pm = t \pm z$, моды (9) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\Psi_\kappa(x) = \theta(x_+)\theta(-x_-)\Psi_\kappa^R + \theta(x_+)\theta(x_-)\Psi_\kappa^F +\\ +\theta(-x_+)\theta(x_-)\Psi_\kappa^L + \theta(-x_+)\theta(-x_-)\Psi_\kappa^P,\end{aligned} \tag{12}$$

соответствующем разбиению пространства Минковского на правый (R), будущий (F), левый (L) и прошлый (P) секторы. Для функций Ψ_κ^R имеем

$$\Psi_\kappa^R = 2^{-1/2}\pi^{-1}K_{i\kappa}\left(m(-x_-x_+)^{1/2}\right)\exp\left[-i\frac{\kappa}{2}\left(\ln\frac{x_+}{-x_-} + i\pi\right)\right]. \tag{13}$$

Остальные функции получаются отсюда заменой $-x_\pm \to e^{i\pi}x_\pm$. Точнее, моды (9) являются аналитическим продолжением функций (13), причем при обходе точек ветвления $x_\pm = 0$ имеем: $(-x_-) \to x_-e^{i\pi}$, $x_+ \to (-x_+)e^{-i\pi}$, $x_- \to$ $\to (-x_-)e^{-i\pi}$ и $(-x_+) \to x_+e^{i\pi}$ при переходах $R \to F$, $F \to L$, $L \to P$ и $P \to R$, соответственно. Второй независимый набор решений Ψ_κ^* получается заменой, $-x_\pm \to x_\pm e^{-i\pi}$.

При $t = 0$ точки ветвления сливаются. Поэтому, чтобы выразить операторы b_κ через значения поля ϕ и его производных на поверхности Коши $t = 0$, нужно вычислить их при $t \neq 0$, а затем устремить $t \to 0$. В итоге имеем

$$b_\kappa = (\Psi_\kappa, \phi)_M = \frac{ie^{\pi\kappa/2}}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty F_R(z,\kappa)dz + \frac{ie^{-\pi\kappa/2}}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\infty}^0 F_L(z,\kappa)dz, \tag{14}$$

где

$$F_{R,L}(z,\kappa) = K_{i\kappa}(\pm mz)\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \mp \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{t=0} + \Gamma(-i\kappa)\left(\pm\frac{mz}{2}\right)^{\pm i\kappa}\frac{\partial\phi}{\partial z}|_{t=0} +$$

[3] Квантование скалярного поля, проведенное ранее в работе [10] с помощью аналитического продолжения функций Грина, эквивалентно квантованию на модах (9).

$$+m\left[K_{i\kappa\mp1}(\pm mz)-\frac{1}{2}\Gamma(1\mp i\kappa)\left(\pm\frac{mz}{2}\right)^{\pm i\kappa-1}\right]\phi(0,z)$$

(верхние (нижние) знаки соответствуют индексам $R(L)$). Здесь предполагается, что поле ϕ достаточно быстро убывает на пространственной бесконечности, но в отличие от (6) не требуется выполнения условия $\phi(0,z)=0$ при $z=0$.

4. Вместо решений (9) Унру предложил использовать правые, $R_\mu(x)$, и левые, $L_\mu(x)$, моды, такие, что $R_\mu(x)=0$ в L-секторе и $L_\mu(x)=0$ в R-секторе. В рассматриваемом случае это функции

$$\begin{aligned} R_\mu(x) &= (2\mathrm{sh}(\pi\mu))^{-1/2}\left[e^{\pi\mu/2}\Psi_\mu(x)-e^{-\pi\mu/2}\Psi^*_{-\mu}(x)\right], \quad \mu>0,\\ L_\mu(x) &= (2\mathrm{sh}(\pi\mu))^{-1/2}\left[e^{\pi\mu/2}\Psi^*_{-\mu}(x)-e^{-\pi\mu/2}\Psi_\mu(x)\right], \quad \mu>0, \end{aligned} \tag{15}$$

удовлетворяющие уравнению КФГ и ортонормированные относительно скалярного произведения в ПМ: $(R_\mu,R_{\mu'})_M=-(L_\mu,L_{\mu'})_M=\delta(\mu-\mu'),(R_\mu,L_{\mu'})_M=0$. Обращая соотношения (15) и подставляя результат в разложение (10), получаем [1–6]

$$\phi=\int\limits_0^\infty d\mu\left[r_\mu R_\mu(x)+r^+_\mu R^*_\mu(x)+l_\mu L^*_\mu(x)+l^+_\mu L_\mu(x)\right], \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} r_\mu &= (2\mathrm{sh}(\pi\mu))^{-1/2}\left[e^{\pi\mu/2}b_\mu+e^{-\pi\mu/2}b^+_{-\mu}\right], \quad \mu>0,\\ l_\mu &= (2\mathrm{sh}(\pi\mu))^{-1/2}\left[e^{\pi\mu/2}b_{-\mu}+e^{-\pi\mu/2}b^+_\mu\right], \quad \mu>0, \end{aligned} \tag{17}$$

и $\left[r_\mu,r^+_{\mu'}\right]=\left[l_\mu,l^+_{\mu'}\right]=\delta(\mu-\mu')$. Отсюда следует

$$\left\langle 0_M|r^+_{\mu'}r_\mu|0_M\right\rangle=(e^{2\pi\mu}-1)^{-1}\delta(\mu-\mu'). \tag{18}$$

Операторы r_μ выражаются в виде скалярного произведения в ПМ: $r_\mu=$ $=(R_\mu,\phi)_\mathrm{M}$. Если здесь в качестве поверхности интегрирования выбрать поверхность $t=0$ и учесть, что моды R_μ равны нулю при $z<0$, а при $z>0$ функционально совпадают с модами Фуллинга (3), то после замены переменных (8) может показаться, что существует равенство $(R_\mu,\phi)_M=(\Phi_\mu,\phi)_R$. Тогда отождествляют операторы r_μ с c_μ, а затем равенство (18) пересчитывают на долю числа частиц, отнесенную к интервалу собственного времени риндлеровского наблюдателя $\tau=\eta/g$:

$$\frac{dN}{d\tau}=\int\limits_0^\infty\frac{d\omega}{2\pi}\left[e^{2\pi\omega/g}-1\right]^{-1}, \quad \omega=g\mu, \tag{19}$$

и интерпретируют как эффект Унру, то есть наличие (с точки зрения риндлеровского наблюдателя) в вакууме Минковского частиц с тепловым бозевским спектром при температуре (1). Однако такая интерпретация [1–6] неправомерна. Действительно, подставляя равенство (14) в первое из уравнений (17) и выполняя замену переменных (8), получаем соотношение

$$r_\mu=\tilde c_\mu+\frac{i}{2\pi}(\mathrm{sh}(\pi\mu))^{1/2}\lim_{\rho\to0}\left\{\phi(0,\rho)\left[\Gamma(-i\mu)\left(\frac{m\rho}{2}\right)^{i\mu}-\Gamma(i\mu)\left(\frac{m\rho}{2}\right)^{-i\mu}\right]\right\}, \tag{20}$$

где $\tilde c_\mu$ определяется формулой (6), в которой произведена замена $\phi_R(x)\to\phi(x)$. Разбиение оператора r_μ на два слагаемых в соответствии с равенством (20) имело бы смысл, только если бы поле ϕ обращалось в нуль в начале координат ПМ. Это требование, необходимое для существования предела в правой части равенства (20), могло быть следствием того, что поле ϕ удовлетворяет некоторому граничному условию на времениподобной поверхности, пересекающей поверхность Коши $t=0$ при $z=0$, причем $\phi(0,0)=0$. Однако такое граничное условие приводит к задаче квантования поля $\tilde{\phi}$ с гамильтонианом $\tilde{H}$, отличной от задачи квантования свободного поля ϕ в ПМ.

Если отождествить $\phi_R(\eta,\rho)$ и $\phi(t,z)$ при $z=\rho>0$ и $t=\eta=0$, то шредингеровский оператор $\tilde{c}_\mu$ совпадает с оператором c_μ, определенным формулой (6). Это совпадение лежит в основе обоснования "эффекта" Унру [1-6]. Однако отождествление этих операторов незаконно, так как они относятся к задачам с разными гамильтонианами. При этом в отличие от гамильтониана H_R в ПР, гамильтониан $\tilde{H}$ не диагонализуется даже в терминах операторов r_μ, l_μ. Кроме того, операторы $\tilde{H}$ и H_R являются генераторами эволюции в глобальном времени t и во времени Риндлера η, соответственно.

Тем более нет оснований отождествлять операторы r_μ, задаваемые соотношениями (17) в ПМ с операторами c_μ, определенными в задаче с граничным условием (7). Это условие соответствует наличию непроницаемой стенки при $\rho=0$, $-\infty<\eta<\infty$, то есть на границе многообразия Риндлера, так что ПР физически никак не связано с ПМ. Как следствие этого, объединение двух поверхностей Коши $\eta=0$ в левом и правом пространствах Риндлера, то есть поверхность $t=0$ в ПМ с выколотой точкой $z=0$, не является поверхностью Коши в этом пространстве.

В качестве примера, поясняющего это утверждение, приведем функцию $D(t,z)=[\phi(x),\phi(0)]_-$, для которой $D(0,z)=0$ и $\frac{\partial}{\partial t}D(t,z)|_{t=0}=\delta(z)$. Эта функция отлична от нуля внутри светового конуса, хотя имеет нулевые данные Коши как в R, так и в L-секторах. В четырех измерениях аналогичными свойствами обладает хорошо известная функция Паули-Иордана, которая удовлетворяет уравнению КФГ, начальным данным Коши $D(0,\mathbf{r})=0$, $\frac{\partial}{\partial t}D(t,\mathbf{r})|_{t=0}=\delta(\mathbf{r})$ и обращается в нуль только вне светового конуса. Таким образом, высказанное выше утверждение о свойстве поверхности Коши не является спецификой двумерия.

Возвращаясь к равенству (18), подчеркнем, что поскольку $\omega=g\mu$ не является энергией в ПМ, а среднее значение в его левой части вычисляется по вакууму Минковского, операторы r_μ определены с помощью скалярного произведения в ПМ, то выражение $\left[e^{2\pi\omega/g}-1\right]^{-1}$ не имеет ничего общего с распределением Бозе. Следовательно, $g/2\pi$ не является температурой и эффект Унру в смысле (19) не существует. Появление бозевского множителя в уравнении (19) всецело обязано специфическим свойствам преобразования Боголюбова (15) и встречается в различных физических задачах, в которых вопрос о температуре никак не может возникнуть. Примером может служить двумерный осциллятор.

Соотношение (18) интерпретируют иногда в терминах матрицы плотности. Такая интерпретация основывается на формуле [3,5]

$$\left\langle 0_M|\mathcal{R}(r_\mu,r^+_{\mu'})|0_M\right\rangle=\mathrm{Sp}_R(\rho_R\mathcal{R}),$$

$$\rho_R=\rho_0\exp\left(-K_R/T\right),\, K_R=\int\limits_0^\infty \mu r^+_\mu r_\mu d\mu.$$

Однако развитие операторов во времени Минковского определяется полным гамильтонианом, а не оператором K_R. Следовательно, матрица ρ_R не удовлетворяет динамическому уравнению Блоха и не может рассматриваться как матрица плотности.

5. Итак, задачи о квантовании свободных полей в пространствах Риндлера и Минковского совершенно различны и, следовательно, их анализ не может служить основой для каких-либо заключений о поведении равноускоренного детектора. Вопрос об ускоренном детекторе в принципиальном плане представляется очень трудным и, по нашему мнению, не имеет в настоящее время удовлетворительного решения. Здесь мы ограничимся только краткими замечаниями о нем.

Во-первых, задача о риндлеровском наблюдателе, а следовательно, и о равноускоренном детекторе, обсуждаемая в работе Унру [1], чрезмерно идеализирована. Даже в классической теории поля, когда не возникает вопрос о приготовлении квантового состояния, в котором производится измерение, в задаче о гиперболическом движении заряда возникают хорошо известные парадоксы [11,12]. Во-вторых, использование в качестве детектора составных систем [1] вызывает многочисленные вопросы, так как в настоящее время не существует последовательной релятивистской теории связанных состояний. В то же время задача о взаимодействии ускоренных частиц с квантованными полями актуальна и имеет интересные физические приложения, см., например, [9,13]. В частности, в работе [9] показано, что используемые как детекторы элементарные частицы не проявляют универсального отклика типа Унру. Вопрос об ускоренном детекторе должен обсуждаться в физически корректной постановке с включением и выключением ускорения, и в настоящее время остается открытым. Мы думаем, однако, что трудно ожидать, что поведение детектора будет универсальным и будет следовать формуле Унру.

Мы благодарны С.Е.Муравьеву за обсуждение. Особенно мы признательны А.А.Старобинскому, прочитавшему работу в рукописи и сделавшему много полезных замечаний. Один из нас (Н.Б.Н.) благодарен проф. Р.Руффини за гостеприимство в Римском университете. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 95-02-05417а и 95-02-06056а).

1. W.G.Unruh, Phys.Rev. **D14**, 870 (1976).
2. N.D.Birrell and P.C.W.Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge: University Press, 1982.
3. W.Greiner, B.Müller, and J.Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.
4. В.Л.Гинзбург, В.П.Фролов, УФН **153**, 633 (1987).
5. А.А.Гриб, С.Г.Мамаев, В.М.Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*, М.: Энергоиздат, 1988.
6. R.M.Wald, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics*, Chicago: University Press, 1994.
7. S.W.Hawking, Commun.Math.Phys. **43**, 199 (1975).
8. S.A.Fulling, Phys.Rev. **D7**, 2850 (1973).
9. А.И.Никишов, В.И.Ритус, ЖЭТФ **94**, 31 (1988).
10. D.G.Boulware, Phys.Rev. **D11**, 1404 (1975).
11. R.Peierls, *Surprises in Theoretical Physics*, Princeton: University Press, 1979.
12. В.Л.Гинзбург, *Теоретическая физика и астрофизика*, М.: Наука, 1981.
13. Я.Б.Зельдович, Л.В.Рожанский, А.А.Старобинский, Письма в ЖЭТФ **43**, 407 (1986).