Письма в ЖЭТФ, том 66, вып.3, стр.178 - 183 © 1997г. 10 августа

ХОПФОВСКИЙ ЧЛЕН В ДЕЙСТВИИ ДЛЯ ВИХРЕЙ-СКИРМИОНОВ ПРИ НЕЧЕТНОМ ЗАПОЛНЕНИИ УРОВНЕЙ ЛАНДАУ

С.В.Иорданский

Институт теоретической физики им.Ландау РАН

142432 Черноголовка, Московская обл, Россия

Поступила в редакцию 5 июня 1997 г.

После переработки 3 июля 1997 г.

Вычислен член третьего порядка по производным матрицы вращения в действии. Использовался прямой диаграммный метод в пределе больших магнитных полей. Показано, что в действии имеется стандартный Хопфовский инвариант с коэффициентом, соответствующем фермионному поведению вихрей-скирмионов.

PACS: 73.20.-r, 73.40.Hm

При нечетных заполнениях уровней Ландау (с учетом спинового расщепления) основное состояние двумерных электронов в сильном магнитном поле является ферромагнитным. Поэтому имеется возможность образования состояний с постепенным изменением направления среднего спина в пространстве. Это изменение может быть очень медленным при малой величине зеемановской энергии по сравнению с кулоновской энергией, что является основанием для использования градиентного разложения. Такой подход использовался в большом количестве теоретических работ [1-4]. Во всех этих работах использовалось приближение, в котором волновые функции считаются спроектированными на множество функций принадлежащих одному фиксированному уровню Ландау. В работе [5] было показано, что такого приближения недостаточно для адекватного описания вихрей-скирмионов и вычисления их энергии. В случае справедливости теории возмущений по производным матрицы вращения была показана термодинамическая выгодность образования таких вихрей. Более подробная статья должна быть опубликована в ЖЭТФ.

В работе [6] был вычислен топологический член третьего порядка по производным в действии для скирмионов. Вычисления производились в приближении спроектированных волновых функций. Однако в этом приближении матрица поворота становится нелокальной и ее унитарность выполняется только в пренебрежении некоторыми полными производными. Возможно, это является причиной нестандартного вида соответствующих членов в действии. Эта работа подверглась критике в дискуссионном комментарии [7]. Авторы [7] приводят выражение с хопфовским инвариантом в действии. Коэффициент перед хопфовским инвариантом был получен на основании некоторого квазиклассического вычисления (вероятно справедливого в пределе заполнения большого числа уровней Ландау), проделанного ранее авторами для некоторой другой физической системы и неиспользующего приближения спроектированных функций. В целом дискуссия не закончена и представляет интерес нахождение топологического члена в действии непосредственно без использования каких-либо приближений кроме предположения о большой величине отношения циклотронной энергии к кулоновской энергии взаимодействия и малой величине g-фактора.

Для описания вихрей-скирмионов введем 2×2 матрицу вращения $U(\mathbf{r}, t)$, которая преобразует электронные спиноры к локальной спиновой системе координат $\psi = U\chi$, где спинор χ является почти ферромагнитным с одной компонентой вверх, а спинор ψ является спинором в лабораторной системе координат. В этом случае Лагранжиан для спиноров χ принимает вид

$$L = \int \left[i\chi^+ \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{1}{2m}\chi^+(-i\nabla - \mathbf{A}_0 - iU^+\nabla U)^2 + i\chi^+ U^+ \frac{\partial U}{\partial t}\chi \right] d^2r dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\chi^+(\mathbf{r})\chi^+(\mathbf{r}')\chi(\mathbf{r}')\chi(\mathbf{r}) d^2r' d^2r dt$$

где потенциальная энергия инвариантна относительно локального вращения, $\mathbf{A}_0$ является вектор-потенциалом однородного внешнего магнитного поля H_0. Мы используем систему единиц с $\hbar = H_0 = l_H = 1$, где l_H – магнитная длина.

Мы предполагаем, что производные матрицы вращения малы и рассматриваем величины $-iU^+\nabla U = \vec{\Omega}^l \sigma_l$ и $-iU^+\partial_t U = \Omega_t^l \sigma_l$, где σ_l матрицы Паули, как малые возмущения в гамильтониане. Таким образом, мы можем разделить гамильтониан на три части (i) невозмущенную, в хартри-фоковском приближении имеющую вид

$$H = \frac{1}{2m}\int \chi^+(-i\nabla - \mathbf{A}_0)^2 d^2r + \int V(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\chi^+(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r}) d^r d^2r' +$$

$$+\int V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') < \chi_\alpha^+(\mathbf{r}')\chi_\beta(\mathbf{r}) > \chi_\beta^+(\mathbf{r})\chi_\alpha(\mathbf{r}') d^2r d^2r';$$

(ii) возмущение первого порядка

$$H_1 = \frac{1}{m}\int \chi^+ \vec{\Omega}^l \sigma_l (-i\nabla - \mathbf{A}_0)\chi d^2r - \int \chi^+ \Omega_t^l \sigma_l \chi d^2r; \tag{1}$$

(iii) возмущение второго порядка

$$H_2 = \frac{1}{2m}\int \chi^+[(\vec{\Omega}^l)^2 - i\nabla\vec{\Omega}^l\sigma_l]\chi d^2r. \tag{2}$$

Здесь мы ввели среднюю плотность ρ и среднее значение $X_{\alpha\beta} =< \chi_\alpha^+(\mathbf{r})\chi_\beta(\mathbf{r}') >$. В дальнейшем мы будем использовать локальное приближение для обменной энергии вводя обменную постоянную γ

$$\int V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') < \chi_\alpha^+(\mathbf{r}')\chi_\beta(\mathbf{r}) > \chi_\beta^+(\mathbf{r})\chi_\alpha d^2r d^2r' \longrightarrow \int \gamma\chi^+(\mathbf{r})\sigma_z\chi(\mathbf{r}) d^2r$$

и пренебрежем прямым взаимодействием. По-видимому использование такой модели является несущественным для окончательных результатов, но сильно упрощает вычисления.

Положим

$$< \chi_\alpha^+\chi_\beta > = < \chi_\alpha^+\chi_\beta >^0 + \delta < \chi_\alpha^+\chi_\beta >,$$

где первый член соответствует однородной ситуации в пренебрежениии всеми Ω^l, то есть главному члену в разбиении гамильтониана, второй член включает все поправки по неоднородности матрицы вращения. Действие с учетом поля Хаббарда-Стратоновича имеет вид

$$S = \int \chi^+ \left[i\partial_t - \frac{1}{2m}(-i\nabla - \mathbf{A}_0 + \vec{\Omega}^l\sigma_l)^2 - \Omega_t^l\sigma_l + \gamma X_{\alpha\beta}^0 \right] \chi d^2r dt +$$

$$+\gamma\int \delta X_{\alpha\beta}\chi_\beta^+\chi_\alpha d^2r dt - \frac{\gamma}{2}\int (X_{\alpha\beta}^0 + \delta X_{\alpha\beta})(X_{\beta\alpha}^0 + \delta X_{\beta\alpha}) d^2r dt.$$

Учитывая, что в приближении среднего поля $X_{\alpha\beta} =< \chi^+_\alpha \chi_\beta >$ нетрудно получить что действие в приближении среднего поля имеет вид

$$S = S_0(\chi, \Omega) + \frac{\gamma}{2} \int \delta < \chi^+_\alpha \chi_\beta > \delta < \chi^+_\beta \chi_\alpha > d^2r dt, \quad (3)$$

где первый член соответствует действию для спиноров χ^+, χ в однородном поле $X^0_{\alpha\beta} =< \chi^+_\alpha \chi_\beta >^0$ с учетом неоднородности матрицы вращения, то есть всех Ω в гамильтониане. Мы вычислим сначала топологические члены в эффективном действии для скирмиона, порождаемом S_0. Второй член полностью определяется электронной функцией Грина также соответствующей действию S_0 и, как будет показано ниже, не содержит топологического Хопфовского инварианта. Для того чтобы найти эффективное действие для вихрей-скирмионов должно быть выполнено интегрирование по фермионному полю в выражении для статсуммы порождаемой действием S_0, что эквивалентно вычислению свободной энергии электронов в терминах полей Ω^l. Поэтому эффективное действие имеет хорошо известную форму $S = iTr ln G$, где G является электронной функцией Грина в поле Ω^l, след вычисляется по всем переменным, включая временную и пространственные координаты.

В настоящей работе мы вычислим только топологический хопфовский член в действии содержащий все три компоненты $\Omega_t, \Omega_x, \Omega_y$. Поэтому необходимо найти вклад всех четырех диаграмм (см.рис). Для первых двух диаграмм, которые формально являются диаграммами второго порядка, мы должны найти вклад третьего порядка по Ω. Невозмущенная гриновская функция имеет вид

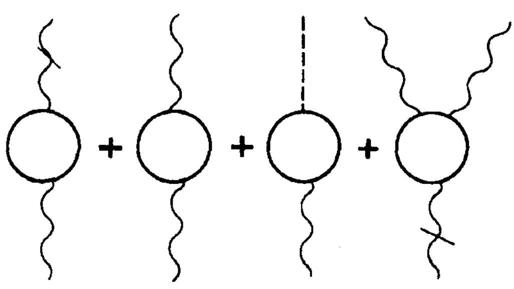
$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = -i < T\chi(\mathbf{r}, t)\chi^+(\mathbf{r}', t') >= \sum_s \int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{dp}{2\pi} g_s(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \Phi_{sp}(\mathbf{r})\Phi^*_{sp}(\mathbf{r}').$$

Здесь T является символом T-произведения для ферми-операторов, s индекс уровня Ландау, Φ_{sp} являются осцилляторными волновыми функциями в используемой нами калибровке Ландау. Матрицы $g_s(\omega)$ соответствуют полностью заполненному (все p) нижнему спиновому подуровню $s = 0$ другой спиновый подуровень и все состояния с $s \neq 0$ являются пустыми

$$g_0(\omega) = \frac{1 + \sigma_z}{2(\omega + \gamma - i\delta)} + \frac{1 - \sigma_z}{2(\omega - \gamma + i\delta)}, \quad (4)$$

$$g_s(\omega) = \frac{1 + \sigma_z}{2(\omega - s\omega_c + \gamma + i\delta)} + \frac{1 - \sigma_z}{2(\omega - s\omega_c - \gamma + i\delta)}. \quad (5)$$

Мы ввели химический потенциал $\mu = \omega_c/2$, так что эта энергия не входит в выражения для g_s.



Волнистая линия соответствует H_1 с пространственными производными, перечеркнутая волнистая линия соответствует части H_1 с временной производной. Пунктирная линия соответствует H_2. Сплошной линией обозначена электронная гриновская функция

Для справедливости теории возмущений по Ω^l необходимо, чтобы поправки к одноэлектронным энергиям [5] $\delta E \sim \frac{(\Omega)^2}{m}$ были малы по сравнению с наиболее маленькой обменной щелью $\gamma\rho \sim \frac{e^2}{l_H}$ что приводит к сильному неравенству $L_c \gg l_H\sqrt{\hbar\omega_c l_H/e^2}$, где L_c размер кора вихря. Размер кора определяется минимумом суммы кулоновской энергии кора $\sim e^2/L_c$ и дополнительной Зеемановской энергии $\sim gH\rho L_c^2$, что дает $L_c^3 \sim e^2/(gH\rho)$. Поэтому достаточно малый g-фактор обеспечивает справедливость теории возмущений по Ω.

С точностью до третьего порядка включительно, получим,

$$S = i\mathrm{Tr}\left[lnG_0 + H_1G_0 + H_2G_0 + \frac{1}{2}H_1G_0H_1G_0 + H_2G_0H_1G_0 + \frac{1}{3}H_1G_0H_1G_0H_1G_0\right],$$

используя стандартную теорию возмущений для функции Грина и разложение логарифма, что соответствует диаграммам рисунка.

Начнем с члена второго порядка, соответствующего первой диаграмме рисунка

$$S_2^1 = \frac{i}{m}\mathrm{Tr}\int \sigma_l g_s \sigma_{l'} g_{s'} e^{i\omega\delta}\frac{d\omega}{2\pi}\Omega_t^l(\mathbf{r},t)\Phi_{sp}(\mathbf{r})\Phi^*_{sp}(\mathbf{r}')\times$$
$$\times\left[\Omega_+^{l'}(\mathbf{r}',t')\pi^- + \Omega_-^{l'}(\mathbf{r}',t')\pi^+\right]\Phi_{s'p'}(\mathbf{r}')\Phi^*_{s'p'}(\mathbf{r})d^2r'd^2rdt.$$

Здесь δ бесконечно малая положительная величина. Выражение $\vec{\Omega}^l(-i\nabla - \mathbf{A}_0)$ записано с помощью величин $\Omega_+^l = (-i\Omega_x^l - \Omega_y^l)/2$ и $\Omega_-^l = (i\Omega_x^l - \Omega_y^l)/2$, а также оператора повышающего индекс Ландау $\pi^+\Phi_{sp} = \sqrt{2(s+1)}\Phi_{s+1,p}$ и оператора понижающего его $\pi^-\Phi_{sp} = \sqrt{2s}\Phi_{s-1,p}$. В написанном выше выражении можно пренебречь временными производными $\vec{\Omega}^l$ так как в хопфовском инварианте отсутствует член с двумя временными производными. Имеются три члена в соответствующем выражении с $s = s' = 0$ и два других с $s = 1$, $s' = 0$; $s = 0$, $s' = 1$.

Вводя новые переменные интегрирования $\mathbf{R} = (\mathbf{r}+\mathbf{r}')/2$ и $\vec{\rho} = (\mathbf{r}' - \mathbf{r})$, легко получить, разлагая по $\vec{\rho}$

$$S_2^1 = \frac{1}{4m\gamma}\sum_{l\neq z}\int\left[i\Omega_t^l div\vec{\Omega}^l - i\vec{\Omega}^l\times\nabla\Omega_t^l - \Omega_t^l\nabla\times\vec{\Omega}^l - \vec{\Omega}^l\times\nabla\Omega_t^l\right]\frac{d^2rdt}{2\pi} +$$
$$+\frac{1}{2}\int(\Omega_t^l\nabla\times\vec{\Omega}^l + \vec{\Omega}^l\times\nabla\Omega_t^l)\frac{d^2rdt}{2\pi} + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\sigma_l\sigma_{l_1}\sigma_z\int(-i\Omega_t^l div\vec{\Omega}^{l_1} + i\vec{\Omega}^{l_1}\nabla\Omega_t^l)\frac{d^2rdt}{2\pi}. \quad (6)$$

Вычисление части действия, соответствующего второй диаграмме (рис.), совершенно аналогично. Член второго порядка не входящий в Хопфовский инвариант может быть опущен и только члены с одной временной производной существенны. Общая формула близка к соответствующей формуле в предыдущем случае. Интересующие нас члены соответствуют $s = 1, s' = 0$ и $s = 0, s' = 1$, остальные содержат лишние пространственные производные. Вводя новые переменные интегрирования $T = (t+t')/2$ и $\tau = t' - t$, мы получаем после разложения по τ

$$S_2^2 = -i\mathrm{Tr}\frac{\sigma_l\sigma_{l_1}(1+\sigma_z)}{2}\int(\Omega_-^{l_1}\frac{\partial\Omega_+^l}{\partial T} - \Omega_+^l\frac{\partial\Omega_-^{l_1}}{\partial t})\frac{d^2rdt}{2\pi}.$$

Используя выражения для Ω_+^l, Ω_-^l и тождество $\partial_t\Omega_k^l = \partial_k\Omega_t^l + 2e^{ljm}\Omega_t^j\Omega_k^m$, где e^{ljm} совершенно антисимметричный единичный тензор, можно переписать это соотношение в виде

$$S_2^2 = -\frac{1}{2}\int(\vec{\Omega}^l \times \nabla\Omega_t^l + 2e^{ljm}\Omega_t^j\vec{\Omega}^l \times \vec{\Omega}^m)\frac{d^2rdt}{2\pi} -$$

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\sigma_{l_1}\sigma_l\sigma_z\int(\vec{\Omega}^l\nabla\Omega_t^{l_1} + 2e^{l_1jm}\vec{\Omega}^l\vec{\Omega}^m\Omega_t^j)\frac{d^2rdt}{2\pi}. \quad (7)$$

Легко получить вклад третьей диаграммы (рис.)

$$S_{21} = -\frac{i}{2m\gamma}\sum_{l\neq z}\int\Omega_t^l div\vec{\Omega}^l\frac{d^2rdt}{2\pi}. \quad (8)$$

Общее выражение для вклада последней диаграммы рисунка имеет вид

$$S_3 = \frac{i}{m^2}\int\mathrm{Tr}\sigma_l g_s\sigma_{l_1}g_{s_1}\sigma_{l_2}g_{s_2}e^{i\omega\delta}\int\Omega_t^l\Phi_{sp}(\mathbf{r})\Phi_{sp}^*(\mathbf{r}_1)(\Omega_+^{l_1}\pi^- + \Omega_-^{l_1}\pi^+)\times$$

$$\times\Phi_{s_1p_1}(\mathbf{r}_1)\Phi_{s_1p_1}^*(\mathbf{r}_2)(\Omega_+^{l_2}\pi^- + \Omega_-^{l_2}\pi^+)\Phi_{s_2p_2}(\mathbf{r}_2)\Phi_{s_2p_2}(\mathbf{r}_2)\Phi_{s_2p_2}^*(\mathbf{r})\frac{d\omega}{2\pi}d^2rd^2r_1d^2r_2dt.$$

Существенны только члены с $s = s_2 = 0, s_1 = 1$ и $s = s_2 = 1, s_1 = 0$. Всеми производными Ω можно пренебречь. Вычисления подобны предыдущим и мы получим

$$S_3^0 = -\frac{i}{m\gamma}\sum_{l\neq z}\mathrm{Tr}\sigma_l\sigma_{l_1}\sigma_{l_2}\int\Omega_t^l\vec{\Omega}^{l_1} \times \vec{\Omega}^{l_2}\frac{d^2rdt}{2\pi} + \frac{i}{4}\mathrm{Tr}\sigma_z\sigma_{l_1}\sigma_{l_2}\int\Omega_t^z\vec{\Omega}^{l_1} \times \Omega^{l_2}\frac{d^2rdt}{2\pi} \quad (9)$$

для членов первого типа и

$$S_3^1 = \frac{1}{2}\int\left[\Omega_t^z(\sum_{l\neq z}[(\vec{\Omega}^l)^2 - (\vec{\Omega}^z)^2] - \sum_{l\neq z}\Omega_t^l\vec{\Omega}^z\vec{\Omega}^l\right]\frac{d^2rdt}{2\pi} + \frac{i}{4}\mathrm{Tr}\sigma_l\sigma_{l_1}\sigma_{l_2}\int\Omega_t^l\vec{\Omega}^{l_1} \times \Omega^{l_2}\frac{d^2rdt}{2\pi} \quad (10)$$

для вклада второго типа.

Сумма всех членов третьего порядка (6)-(10) дает искомый хопфовский член в действии. Поясним некоторые результаты такого суммирования. Все члены имющие множитель $1/(m\gamma)$ комбинируются в полную производную

$$\frac{1}{4m\gamma}\sum_{l\neq z}\int\left[-idiv(\Omega_t^l\vec{\Omega}^l - \nabla \times (\Omega_t^l\vec{\Omega}^l)\right]\frac{d^2rdt}{2\pi} = 0,$$

которая дает нуль, т.к. $\vec{\Omega}^l$ с $l \neq z$ стремятся экспоненциально к нулю на больших расстояниях. Симметричные дифференциальные члены в S_2^1 и S_2^2 также комбинируются в полную производную

$$\frac{(-i)}{4}\mathrm{Tr}\sigma_l\sigma_{l_1}\sigma_z\int div(\Omega_t^l\vec{\Omega}^{l_1})\frac{d^2rdt}{2\pi} = 0,$$

которая дает нуль по той же причине. Симметричные не дифференциальные члены в S_2^2 и S_3^1 взаимно уничтожаются и мы получаем полностью антисимметричное выражение в действии

$$S_3 = \frac{i}{4}\mathrm{Tr}\sigma_l\sigma_{l_1}\sigma_{l_2}\int\Omega_t^l\vec{\Omega}^{l_1} \times \vec{\Omega}_{l_2}\frac{d^rdt}{2\pi} + \frac{1}{2}\int\Omega_t^l\nabla \times \vec{\Omega}^l\frac{d^2rdt}{2\pi} - e^{ljm}\int\Omega_t^j\vec{\Omega}_l \times \vec{\Omega}^m\frac{d^2rdt}{2\pi}.$$

Вычисляя след и пользуясь тождеством $\nabla \times \vec{\Omega}^l = e^{ljm}\vec{\Omega}^j \times \vec{\Omega}^m$, запишем ответ в виде

$$S_3 = \frac{1}{2\pi}e^{ljm}\int\Omega_t^l\vec{\Omega}^j \times \vec{\Omega}^m d^2rdt = \frac{1}{2\pi}\int\Omega_t^l\frac{\mathbf{H}}{H}rot\vec{\Omega}^l d^2rdt,$$

где мы ввели явно внешнее магнитное поле. Отметим, что конечное выражение имеет все элементы симметрии: $t \to (-t), \mathbf{H} \to (-\mathbf{H}); x \rightleftharpoons y$; вращение орбитального пространства вокруг направления магнитного поля, вращение спинового пространства, которые присущи обменному взаимодействию. Таким образом, можно сказать, что вид S_3 диктуется соображениями симметрии и зануление остальных членов является ее следствием.

Возвращаясь к полной формуле (3) для действия следует сказать, что второй член этой формулы со взаимодействием не имеет нужной симметрии в тех членах, которые могли бы войти в хопфовский инвариант, т.к. они обязательно содержат только Ω_t^l с $l \neq z$, что легко показать вычисляя соответствующее $\delta < \chi^+ \alpha \chi_\beta$. Следовательно, различные члены нужного вида должны взаимно уничтожиться и Хопфовский инвариант дает только S_3. Инвариант Хопфа может быть выражен в терминах Ω согласно работе [8] в виде

$$H = \frac{1}{2(\pi)^2} e^{ljm} \int \Omega_t^l \vec{\Omega}^j \times \vec{\Omega}^m d^2 r dt$$

и, следовательно,

$$S_H = \pi H.$$

Этот результат подтверждает выражение, приведенное в [7], и не совпадает с ответом полученным в статье [6] для случая $s = 0$. Последнее утверждение следует из следующих соображений. Инвариант Хопфа H принимает произвольные целые значения, соответствующие коэффициенту зацепления кривых $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{const}, |\mathbf{n}| = 1$ для отображения S_3 на S_2. В этом случае Ω стремятся к нулю при больших $\mathbf{r}, t$ так как бесконечность R_3 должна соответствовать одной точке, чтобы представлять S_3. В этом случае степень отображения любого сечения $t = \mathrm{const}$ должна совпадать со степенью отображения при $t \to \infty$ и, следовательно, равняться нулю. Это означает, что величины Ω^l убывают быстрее чем $1/r$. Выражение, полученное в работе [6] является интегралом от полной пространственной производной и обращается в нуль в этом случае, в отличие от инварианта Хопфа, принимающего любые целые значения. Следует также отметить это выражение не обладает полной симетрией задачи.

Результат, полученный для S_H означает, согласно существующей точке зрения, что вихри-скирмионы соответствуют фермионам [9].

Автор выражает благодарность Г.Е.Воловику за ценные обсуждения.

Исследование описанное в настоящей публикации было частично поддержано грантом RP1-273 US Civilian Research and Development Foundation for Independent States of Former Sovjet Union. Частично оно было также поддержано грантом INTAS 95-1/RU-675.

1. S.Sondhi, A.Kalrede, S.Kivelson, and E.Rezai, Phys. Rev. B **47**, 16418 (1993).
2. H.Fertig, L.Brey, R.Cote, and A.MacDonald, Phys. Rev. B **50**, 11018 (1994).
3. K.Moon, H.Mori, K.Yang et al., Phys. Rev. B **51**, 5138 (1995).
4. Yu.Bychkov, T.Maniv, and I.Vagner, Phys. Rev. B **53**, 10148 (1996).
5. S.Iordanskii and S.Plyasunov, ZhETF Lett. **65**, 248 (1997).
6. W.Apel and Yu.Bychkov, Phys. Rev. Lett. **78**, 2188 (1997).
7. G.Volovik and V.Yakovenko, Cond-mat/9703228.
8. G.Volovik and V.Yakovenko, J. Phys. Cond. Matter **1**, 5263 (1989).
9. F.Wilczek and A.Zee, Phys. Rev. Lett. **51**, 2250 (1983).