Письма в ЖЭТФ, том 66, вып.3, стр.206 - 211 10 августа

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СЛАБО ДЕФОРМИРОВАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

А.И.Зенчук[1)]

Институт теоретической физики РАН им.Л.Д.Ландау, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 18 июня 1997 г.
После переработки 26 июня 1997 г.

Предложен метод построения решений нелинейного уравнения Шредингера с малыми поправками, возникающими вследствие введения произвольных функций времени и координат в оператор, производящий одевание ядра локальной $\bar\partial$-проблемы.

PACS: 02.30.-f, 03.65.-w

Во многих разделах физики (например, нелинейная оптика, физика плазмы) широкое приложение имеет нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), которое, как известно, является полностью интегрируемой моделью. Последнее утверждение, вообще говоря, неверно для произвольных деформаций НУШ, которые также часто встречаются среди уравнений математической физики. Однако, существуют классы деформаций, которые не нарушают интегрируемость НУШ. Выявление этих классов и их изучение является актуальной проблемой. В [1], например, использовался симметрийный подход к исследованию "ассимптотической интегрируемости" возмущенного НУШ.

В данной работе найдены некоторые новые классы таких деформаций. При этом использовалась так называемая $\bar\partial$-проблема [2–4], являющаяся одной из реализаций метода одевания [5], в котором исследование нелинейных систем уравнений сводится к исследованию связанных с ними линейных систем (дифференциальных и интегро-дифференциальных применительно к локальной и нелокальной $\bar\partial$-проблемам, соответственно) посредством одевающих операторов. Построение с помощью техники одевания новых интегрируемых систем уравнений, являющихся деформациями известных интегрируемых моделей, стало возможным благодаря использованию в одевании ядра $\bar\partial$-проблемы операторов с произвольными функциями Φ_i времени и координат (то есть независимых переменных нелинейных уравнений), что порождает системы нелинейных уравнений с переменными коэффициентами, зависящими от функций Φ_i [6]. Такого рода одевание описывает, например, резонансное взаимодействие волн в неоднородной среде. Будучи произвольными, функции Φ_i могут быть объявлены функциями зависимых переменных (решений) нелинейной системы.

Схема построения слабо деформированных интегрируемых моделей посредством подобного одевания приведена ниже. Их отличие от стандартных интегрируемых заключается в поправках, имеющих форму бесконечного ряда по степеням малого параметра ε и содержащих произвольные функции Φ_i. Причем, эти уравнения являются точно интегрируемыми с помощью $\bar\partial$ проблемы, то есть имеют класс точных решений в виде аналитически заданных функций,

1) e-mail: zenchuk@itp.ac.ru

содержащих малый параметр. Это отличает их от других типов возмущенных уравнений, приближенные решения которых записываются в виде ряда по степеням малого параметра с точностью до нужного порядка. Так же, как и в [6], на функции Φ_i и зависимые переменные нелинейных уравнений могут быть наложены связи в виде произвольных интегро-дифференциальных (в общем случае) уравнений (уравнений связей). Если, например, функции Φ_i характеризуют слабую неоднородность среды, то уравнения связей отражают влияние физической величины, представленной решением нелинейного уравнения, на неоднородность. Важным фактором является разрешимость этих уравнений относительно функций Φ_i. Иначе вопрос о построении решений нелинейной системы уравнений со связями остается открытым.

Разобранный ниже на примере НУШ алгоритм выявления слабых деформаций, не нарушающих интегрируемости, применим и к другим полностью интегрируемым моделям, которые обслуживаются методом одевания.

1. Будем исходить из локальной $\bar{\partial}$-проблемы (далее черта над функцией означает комплексное сопряжение)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}}\psi(\lambda) = \psi(\lambda)R(x,y;\lambda) \tag{1}$$

с регулярной нормировкой

$$\psi \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{j>0} \frac{\psi_j}{\lambda^j}, \ \lambda \to \infty, \tag{2}$$

и ядром R вида

$$R(x,y;\lambda) = e^{K(x;\lambda)}R_0(\lambda)e^{-K(x;\lambda)}, \tag{3}$$

где K – одевающий оператор:

$$K(x;\lambda) = i\left(\lambda x + 2\lambda^2 y + \sum_{k=1}^{N_1} \varepsilon^{n_k}\lambda^{k-1}\Phi_k\right)\sigma_3, \tag{4}$$

$\sigma_3 = \mathrm{diag}(1,-1)$, N_1 – целое число, Φ_i – произвольные функции параметров x, y; $\varepsilon \to 0$ – малый параметр.

Поскольку НУШ обслуживается задачей (1) – (3) с одевающим оператором $K = i\lambda\sigma_3 x + 2i\lambda^2\sigma_3 y$, сформулированная таким образом задача (1) – (4) описывает слабо деформированное НУШ.

В дальнейшем будем считать уравнение (1) однозначно разрешимым. Это утверждение справедливо, по крайней мере, для определенного типа ядер (см. [2]).

Отметим, что локальная $\bar{\partial}$-проблема обслуживает тот же класс нелинейных уравнений, что и локальная задача Римана. Поэтому для построения решений описываемых здесь моделей можно использовать технику, предложенную в [7].

Очевидно, что функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 можно исключить из одевания посредством калибровочного преобразования функции $\psi(\lambda)$ и преобразований независимых координат x, y. Мы вернемся к этому вопросу в п. **4**. Здесь же рассмотрим одевающий оператор K общего вида (4).

2. Вывод слабо деформированного НУШ с помощью задачи (1) – (4) основан на построении операторов M_k вида (см. [2–4])

$$M_k\psi = \sum_{ij} u_{k;ij} D_x^i D_y^j \psi, \quad D_x\psi = \partial_x\psi + \psi\partial_x K, \quad D_y\psi = \partial_y\psi + \psi\partial_y K,$$

регулярных в комплексной плоскости параметра λ, таких что

$$M_k\psi \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

Это означает, что $M_k\psi \equiv 0$ в силу предположения об однозначной разрешимости уравнения (1).

В нашем случае существует всего два независимых оператора M_k, которые порождают переопределенную линейную систему уравнений на функции ψ:

$$\begin{aligned} M_1\psi &\equiv D_x\psi - U\psi = \partial_x\Psi - U\Psi = 0 \\ M_2\psi &\equiv D_y\psi - W\psi = \partial_y\Psi - W\Psi = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\Psi = \psi \exp(K)$,

$$U = i\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + i\sum_{k=1}^{N_1}\varepsilon^{n_k}\partial_x\Phi_k V_k$$

$$W = 2i\lambda^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2i\lambda\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + Q + i\sum_{k=1}^{N_1}\varepsilon^{n_k}\partial_y\Phi_k V_k$$

$$Q = 2i\left([\psi_2,\sigma_3] - [\psi_1,\sigma_3]\psi_1\right) = Q_{NS} + Q_\Phi, \quad Q_{NS} = \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ -r_x & 0 \end{pmatrix} - irq\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} = [\psi_1,\sigma_3], \quad V_1 = \sigma_3, \quad V_n = \lambda^{n-1}\sigma_3 + \sum_{k=0}^{n-2}\lambda^k V_{n,k}, \quad n > 1.$$

При этом коэффициенты $V_{k,n}$ связаны между собой формулами:

$$V_{n,l} = V_{n-l,0}, \quad V_{2,0} = [\psi_1,\sigma_3], \quad V_{n,0} = [\psi_{n-1},\sigma_3] - \sum_{k=1}^{n-2} V_{n-k,0}\psi_k, \quad n > 2. \tag{6}$$

Далее везде будем использовать редукцию

$$r = \bar{q}, \quad \bar{\Phi}_k = \Phi_k \tag{7}$$

(т.е. функции Φ_k – вещественные).

Деформированное НУШ следует из условия совместности линейных уравнений (5)

$$U_y - W_x + [U, W] = 0. \tag{8}$$

Анализируя это условие, будем учитывать соотношения (6). Представим функции Q_Φ и $V_{k,0}$ в виде рядов по параметру ε

$$Q_\Phi = \sum_{k\geq 1}\varepsilon^k Q_k, \quad V_{n,0} = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k V_{n,0,k}$$

и разложим уравнение (8) по этому параметру. Приравнивая нулю коэффициенты перед всеми степенями λ, получим выражения для функций Q_k, $V_{n,0,k}$ через комплексную функцию q и произвольные функции Φ_j, а также уравнение на функцию q, которое имеет вид НУШ с малой поправкой в виде ряда по степеням параметра ε.

$$iq_y - q_{xx} - 2q^2\bar{q} + \sum_{k\geq 1}\varepsilon^k P_k = 0. \tag{9}$$

Выбор чисел n_k в (4) определяет зависимость функций Q_k, $V_{n,0,k}$, P_k от q и Φ_j.

3. Положим в формуле (4) $n_k = k$, $k = 1, \ldots, 4$, $N_1 = 4$ и выпишем выражения для первых четырех поправок уравнения (9):

$$P_1 = 2i(2q_x\partial_x\Phi_1 + q\partial_{xx}\Phi_1 - iq\partial_y\Phi_1), \tag{10}$$

$$P_2 = -i(2iq_{xx}\partial_x\Phi_2 + iq_x\partial_{xx}\Phi_2 + q_x\partial_y\Phi_2) + 4q(\partial_x\Phi_1)^2, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} P_3 = &-i(q_{xxx} + 4q_xq\bar{q} + 2q^2\bar{q}_x)\partial_x\Phi_3 - \frac{1}{2}(q_{xx} + 2q^2\bar{q})(i\partial_{xx}\Phi_3 + \partial_y\Phi_3) - \\ &- (8iq_x\partial_x\Phi_2\partial_x\Phi_1 + 4iq\partial_x\Phi_2\partial_{xx}\Phi_1 + 2iq\partial_{xx}\Phi_2\partial_x\Phi_1 + 2q\partial_y\Phi_2\partial_x\Phi_1), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} P_4 = &-\frac{1}{2}\partial_x\left(q_{xxx} + 6q\bar{q}q_x\right)\partial_x\Phi_4 + \frac{1}{4}\left(q_{xxx} + 6q\bar{q}q_x\right)\left(-\partial_{xx}\Phi_4 + i\partial_y\Phi_4\right) - \\ &- \big(6q_{xx}\partial_x\Phi_3\partial_x\Phi_1 + 2q_x\partial_{xx}\Phi_3\partial_x\Phi_1 + 6q_x\partial_x\Phi_3\partial_{xx}\Phi_1 + 4q^2\bar{q}\partial_x\Phi_3\partial_x\Phi_1 + \\ &+ q\partial_{xx}\Phi_3\partial_{xx}\Phi_1 + 2q\partial_x\Phi_3\partial_{xxx}\Phi_1 - 2iq_x\partial_y\Phi_3\partial_x\Phi_1 - iq\partial_y\Phi_3\partial_{xx}\Phi_1 + \\ &+ 3q_{xx}(\partial_x\Phi_2)^2 + 3q_x\partial_{xx}\Phi_2\partial_x\Phi_2 - iq_x\partial_x\Phi_2\partial_y\Phi_2\big) - 8q\partial_x\Phi_2(\partial_x\Phi_1)^2. \end{aligned} \tag{13}$$

В выписанных формулах функции Φ_j – произвольные функции параметров x, y. В силу предположения о разрешимости уравнения (1), известен явный вид зависимости функции q от Φ_j:

$$q = q(\Phi_j). \tag{14}$$

Этот факт может быть использован следующим образом.

Введем уравнения связей

$$F_j(q, \bar{q}, \Phi_i) = 0, \quad j = 1, \ldots, N_2, \quad N_2 \leq N_1, \tag{15}$$

N_1 – число функций Φ_j. Здесь F_j – произвольный (в общем случае, интегро-дифференциальный по x, y) оператор, действующий на свои аргументы. Если функции Φ_i характеризуют неоднородность среды, то уравнения (15) отражают влияние решения q на степень неоднородности. Таким образом, построена замкнутая система уравнений на функции Φ_i $(i = 1, \ldots N_2)$, q, параметрически зависящая от функций Φ_i, $i = N_2 + 1, \ldots, N_1$, решение которой сводится к решению уравнений (15) относительно функций Φ_i, $i = 1, \ldots, N_2$. При этом левые части уравнений (15) (с учетом (14)) есть произвольные интегро-дифференциальные операторы, действующие на функции Φ_i.

Важным частным случаем являются уравнения (15) при $N_2 = N_1$, из которых в явном виде можно выразить функции Φ_i через q, $\bar{q}$:

$$\Phi_j = \Theta_j(q, \bar{q}), \quad j = 1, \ldots, N_1, \tag{16}$$

Θ_j – произвольные операторы. Это означает, что неоднородность среды полностью определяется "возмущением" q, которое в ней "распространяется". То есть уравнения (16) характеризуют нелинейные эффекты взаимодействия "возмущения" со средой. Подставляя (16) в (9) – (13), получим систему уравнений с постоянными коэффициентами на функцию q. Остановимся на этих уравнениях подробнее.

Уравнения связей (16) определяют структуру поправок P_k. Например, если выбрать в качестве связей уравнения типа

$$\Phi_j = D_j I_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где D_i линейный дифференциальный по x, y оператор с постоянными коэффициентами, I_k – сохраняющиеся плотности НУШ, то уравнение (9) вместе с поправками будет инвариантно относительно калибровочного преобразования

$$q \to q\exp(i\theta), \quad Im(\theta) = 0. \tag{17}$$

Можно подобрать такие операторы D_j, что каждая поправка P_k будет удовлетворять условию масштабной инвариантности с некоторым масштабным весом. НУШ с такими поправками появляется при переходе в уравнениях математической физики к пределу плавных огибающих [2]. Напомним, что полином $P(q,\overline{q},q_x,\overline{q}_x,q_{xx},\overline{q}_{xx},\ldots)$ имеет масштабный вес M, если при масштабных преобразованиях $q=s^{\delta_1}u$, $x=s^{\delta_2}\xi$ (где s,δ_i – вещественные константы) он преобразуется по закону:

$$P(q,\overline{q},q_x,\overline{q}_x,q_{xx},\overline{q}_{xx},\ldots)=s^M P(u,\overline{u},u_\xi,\overline{u}_\xi,u_{\xi\xi},\overline{u}_{\xi\xi},\ldots).$$

Здесь мы не будем останавливаться подробно на изучении поправок какого-либо типа. Приведем несколько характерных примеров.

Ниже проанализирована структура поправок (10) – (13) возмущенного НУШ (9), соответствующих простейшим уравнениям связей. При анализе принимается во внимание различное поведение поправок относительно калибровочных и масштабных преобразований, а также соотношение порядка малости n поправки P_n ($P_n\sim\varepsilon^n$) и ее масштабного веса M_n, которое будем характеризовать параметром Γ_n:

$$\Gamma_n=M_n-n.$$

Последняя характеристика имеет смысл, если рассматривать уравнение (9) с двумя и более поправками P_k разного порядка.

Напомним, что в полностью интегрируемой модели

$$q_y=NS+\sum_{k>3}\varepsilon^{k-2}NS_k, \tag{18}$$

(NS_k – высшие симметрии НУШ) этот параметр равен трем для всех поправок: $\Gamma_k=3$.

Приведем несколько примеров.

а) $\Phi_1=q\overline{q}$, $\Phi_k=0,k>1$. $P_1=4i(q_x^2\overline{q}+2qq_x\overline{q}_x+q^2\overline{q}_{xx})$

– здесь поправка обладает масштабной инвариантностью и инвариантностью относительно преобразования (17);

б) $\Phi_1=\partial_x(q\overline{q})+q\overline{q}$, $\Phi_k=0,k>1$.

$$P_1=4i(q_x^2\overline{q}+2qq_x\overline{q}_x+q^2\overline{q}_{xx}+q_{xx}q_x\overline{q}+q_{xx}\overline{q}_xq+2q_x^2\overline{q}_x+3q_xq\overline{q}_{xx}+q^2\overline{q}_{xxx}),$$

– нарушена масштабная инвариантность;

с) $\Phi_2=\partial_x^{-1}(q\overline{q})$, $\Phi_3=x$, $\Phi_k=0,k\neq2,3$.

$$P_2=2q(q_{xx}\overline{q}+q_x\overline{q}_x),\ P_3=-i(q_{xxx}+4q_xq\overline{q}+2q^2\overline{q}_x),$$

– масштабный вес поправки P_2 больше, чем поправки P_3: $\Gamma_2=3$, $\Gamma_3=1$;

д) $\Phi_1=q+\overline{q}$, $\Phi_k=0$, $k>1$.

$$P_1=4i\left(q_x^2+q_x\overline{q}_x-q^3\overline{q}+q^2\overline{q}^2+q\overline{q}_{xx}\right),$$

– нарушено условие инвариантности относительно преобразования (17);

е) $\Phi_3=x$, $\Phi_4=\partial_x^{-1}(q\overline{q})$, $\Phi_k=0$, $k\neq3,4$.

$$P_3=-i(q_{xxx}+4q_xq\overline{q}+2q^2\overline{q}_x),$$

$$P_4=-\frac{q}{2}(q_{xxxx}\overline{q}+q_{xxx}\overline{q}_x+6q_{xx}q\overline{q}^2+6q_x^2\overline{q}^2+12q_xq\overline{q}_x\overline{q})$$

– здесь $\Gamma_3=1$, $\Gamma_4=3$.

4. Происхождению рассмотренных выше поправок можно дать наглядную интерпретацию в терминах слабых деформаций коммутирующих потоков.

Действительно, иерархии НУШ соответствует одевающий оператор

$$K_{NS}=i\left(\lambda\xi+2\lambda^2\eta+\sum_{k>2}\lambda^k C_{k-2}\tau_{k-2}\right)\sigma_3,\quad C_k=\mathrm{const},\tag{19}$$

где τ_k – высшие времена иерархии. Выпишем уравнения для коммутирующих потоков в схематичной форме:

$$u_{\theta_1}=u,\quad u_{\theta_2}=u_\xi,\quad u_\eta=NS_3(u)\equiv NS(u),\quad u_{\tau_k}=NS_{3+k}(u),\quad k=1,2,\dots,\tag{20}$$

где $NS_k(u)$, – симметрии НУШ порядка k:

$$NS_1=u,\ \ NS_2=u_\xi,\ \ NS_3=u_{\xi\xi}+2u^2\overline{u},\ \ NS_4=u_{\xi\xi\xi}+6u\overline{u}u_\xi,\dots,$$

Теперь применим инфинитизимальные преобразования

$$u=q\exp(-2i\varepsilon^{n_1}\Phi_1),\quad \xi=x+\varepsilon^{n_2}\Phi_2,\quad \eta=y+\frac{\varepsilon^{n_3}}{2}\Phi_3,\quad \tau_k=t_k+\frac{\varepsilon^{n_{k+3}}}{C_k}\Phi_k,\quad k=1,2,\dots,\tag{21}$$

к уравнениям (20) (здесь функции Φ_k зависят только от x,y; преобразования решения q и переменной x равносильны преобразованиям времен θ_1 и θ_2), разложим их по параметру ε и исключим из третьего уравнения системы (20) производные функций $q,\overline{q}$ по "высшим временам" t_k. Ясно, что после такой процедуры получим снова уравнение (9), поскольку оператор K_{NS} после преобразования (21) будет отличаться от оператора K (см. (4)) только многочленом $i\sum_{k>2}\lambda^k C_{k-2}t_{k-2}$. Последнее означает, что оператору K_{NS} соответствуют те же "удлинненные производные" D_x, D_y, что и оператору K, которые определяют вид нелинейного уравнения, обслуживаемого данным одеванием.

При таком выводе уравнения (9) все функции Φ_k равноправны и характеризуют деформацию соответствующих переменных иерархии НУШ. Этим оправдано использование в п.1 одевающего оператора K общего вида (4) (см. п.1). Общая структура поправок P_{n_k} такова:

$$P_{n_k}=2\left(\frac{-i}{2}\right)^{k-1}((NS_k(q))(i\partial_{xx}\Phi_k+\partial_y\Phi_k)+2i\partial_x(NS_k(q))\partial_x\Phi_k)+F_{n_k},\tag{22}$$

где функции F_{n_k} зависят от Φ_j, NS_j $(j\neq k)$ и их производных по x, y.

Отметим, что построенные таким образом решения уравнения (9) параметрически зависят от t_k, $k=1,2,\dots$.

При получении ряда формул использовался пакет программ для аналитических вычислений REDUCE.

Автор выражает благодарность С.В. Манакову за полезные обсуждения. Работа поддержана РФФИ (грант 94-01-00899-а).

---

1. I.Kodama and A.V.Mikhailov, in: *Algebraic aspects of integrability*, Eds. I.M.Gelfand, A.Fokas: Birkhauser, 1996.
2. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, Функцион. анализ и его прил. **19**(2), 11 (1985).
3. L.V.Bogdanov and S.V.Manakov, J. Phys. A:Math.Gen. **21** L537, (1988).
4. А.И.Зенчук, С.В.Манаков, ТМФ **105**(3), 371 (1995).
5. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, Функцион. анализ и его прил. **8** (3), 43 (1974).
6. A.Degasperis, S.V.Manakov, and A.I.Zenchuk, Multidimensional Soliton Equations in Inhomogeneous Media, to be published.
7. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, Функцион. анализ и его прил. **13**(3), 13 (1979).