

**П И С Ь М А**  
**В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ**  
**И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ  
 ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД

ТОМ 66, ВЫПУСК 4  
 25 АВГУСТА, 1997

Письма в ЖЭТФ, том 66, вып.4, стр.213 - 218

© 1997г. 25 августа

**МЕТОД МНИМОГО ВРЕМЕНИ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАДАЧ**

*В.С.Попов, В.Д.Мур<sup>+</sup>, Б.М.Карнаков<sup>+</sup>*

*Институт теоретической и экспериментальной физики  
 117218 Москва, Россия*

*<sup>+</sup>Московский инженерно-физический институт  
 115409 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 июня 1997 г.

Представлена релятивистская версия метода мнимого времени. С помощью которого рассчитана вероятность ионизации связанного состояния  $\omega$  под действием электрического и магнитного полей различной конфигурации (в том случае, когда энергия связи уровня  $E_b$  сравнима с  $mc^2$ ). Полученные формулы охватывают, в качестве предельных случаев, как ионизацию нерелятивистских связанных систем (атомы, ионы), так и случай  $E_b = 2mc^2$ , когда  $\omega$  сравнивается с вероятностью рождения электрон-позитронных пар из вакуума в сильном поле.

PACS: 03.65.-w, 32.60.+i

1. Метод мнимого времени (ММВ) был предложен [1,2] в связи с расчетом вероятности многофотонной ионизации атомов полем сильной световой волны. Для описания процесса туннелирования вводятся подбарьерные траектории, удовлетворяющие классическим уравнениям движения, но с мнимым временем  $t$ . Мнимая часть функции действия, вычисленная вдоль такой траектории, определяет вероятность туннелирования частицы.

Недавно с помощью ММВ исследовалось влияние магнитного поля на ионизацию атомов и ионов [3,4]. При этом подбарьерное движение электрона считалось нерелятивистским, что справедливо для валентных электронов. Однако в случае ионизации  $K$ -оболочки в тяжелых атомах становятся существенными релятивистские эффекты, последовательный учет которых (в квазиклассическом приближении) требует обобщения ММВ на релятивистский случай, что может оказаться полезным также и в ряде вопросов релятивистской ядерной физики и квантовой хромодинамики. Мы продемонстрируем возможность такого обобщения на конкретной задаче об ионизации связанного состояния,

энергия связи которого  $E_b = mc^2 - E_0$  сравнима с энергией покоя  $mc^2$ , и найдем главный (экспоненциальный) множитель в вероятности ионизации. Кратко обсуждается также учет кулоновского взаимодействия в процессе туннелирования и вычисление предэкспоненциального множителя.

2. Начнем с ионизации уровня, связанного короткодействующими силами, под действием электрического ( $\mathcal{E}$ ) и магнитного ( $\mathcal{H}$ ) полей; эти поля считаем постоянными и однородными.

а) В том случае, когда имеется только электрическое поле, подбарьерные траектории имеют вид:

$$x = \frac{ip_{\perp}}{e\mathcal{E}}(\arcsin\tau_0 - \arcsin\tau), \quad y = 0, \quad z = \frac{M}{e\mathcal{E}}(\sqrt{1 - \tau^2} - \sqrt{1 - \tau_0^2}), \quad (1)$$

где  $\tau = ie\mathcal{E}t/M$  при вещественном  $\tau$ , связанным с собственным временем  $s$  соотношением  $s = -i(m/e\mathcal{E})\arcsin\tau$ ,  $M = \sqrt{m^2 + p_{\perp}^2}$ , ось  $z$  направлена вдоль  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $p_{\perp}$  – поперечный импульс. Начальный момент  $t_0$  подбарьерного движения определяется из условий [2]

$$\mathbf{r}(t_0) = 0, \quad H(t_0) = m(1 - \dot{\mathbf{r}}^2)^{-1/2} = E_0, \quad (2)$$

(в калибровке, где  $\varphi(0, t) = A(0, t) = 0$ , и в приближении нулевого радиуса сил), откуда

$$et_0 = \frac{im}{e\mathcal{E}}(1 - \epsilon_0^2 + q^2)^{1/2}, \quad q = p_{\perp}/m. \quad (3)$$

Здесь  $E_0 = m\epsilon_0$  – энергия связанного состояния ( $-1 \leq \epsilon_0 < 1$ , значения  $\epsilon_0 = \pm 1$  отвечают границам верхнего и нижнего континуума). Вероятность туннелирования электрона вдоль траектории (1) равна [1,2]

$$dw(p_{\perp}) = \frac{\text{const}}{\hbar m} \exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \text{Im} W(p_{\perp})\right\} d^2 p_{\perp}, \quad (4)$$

где  $W$  – укороченное действие:

$$W = \int_{t_0}^0 (L + E_0) dt - (\mathbf{p}\mathbf{r})_{t=0}, \quad L = -\sqrt{1 - v^2} + e(\mathbf{A}\mathbf{v}) - e\varphi, \quad (4a)$$

(далее, как правило,  $\hbar = c = 1$ ). При углублении уровня  $t_0$  движется в комплексной плоскости, огибая точку ветвления  $t_*$ , как показано на рис.1. С учетом этого

$$\begin{aligned} W &= \frac{im^2}{2e\mathcal{E}} \left[ (1 + q^2) \arccos \frac{\epsilon_0}{\sqrt{1 + q^2}} - \epsilon_0 \sqrt{1 - \epsilon_0^2 + q^2} \right] = \\ &= \frac{im^2}{2e\mathcal{E}} \left[ \Phi(\epsilon_0) + q^2 \arccos \epsilon_0 + O(q^4) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$\Phi(\epsilon) = \arccos \epsilon - \epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2}$ . Интегрируя (4) по поперечному импульсу, находим полную вероятность ионизации  $s$ -уровня:

$$w(\mathcal{E}, \epsilon_0) = \frac{mc^2}{2\hbar} |A_{\kappa}|^2 \frac{\mathcal{E}/F_{cr}}{\arccos \epsilon_0} \exp\left\{-\frac{F_{cr}}{\mathcal{E}} \Phi(\epsilon_0)\right\}, \quad (6)$$

где  $A_\kappa$  – асимптотический ( $r \rightarrow \infty$ ) коэффициент волновой функции связанного состояния в отсутствие поля  $\mathcal{E}$  (ср. с формулой (9) в [3]), а  $F_{cr} = = m^2 c^3 / e \hbar$  – критическое, или швингеровское поле, характерное для квантовой электродинамики [5,6].

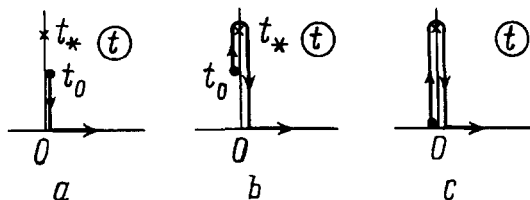


Рис.1. Изменение "времени"  $t$  в подбарьерном движении: а) уровень с энергией  $E_0 > 0$ ; б)  $0 > E_0 > -m$ ; в)  $E_0 = -m$ . Крестом обозначена точка ветвления  $t = t_*$  функции  $[p(t)^2 + m^2]^{1/2}$

В нерелятивистском пределе ( $\epsilon_0 \rightarrow 1$ ) эта формула переходит в известное выражение [7,8] для вероятности ионизации отрицательных ионов (типа  $H^-$ ,  $Na^-$  и т.д.). При  $\epsilon_0 = -1$ , то есть для уровня, опустившегося до границы нижнего континуума (критический заряд ядра  $Z_{cr}(1s_{1/2}) = 173$ , см.[9-12]), экспоненциальный множитель в (6) становится равным  $\exp(-\pi F_{cr}/\mathcal{E})$  и совпадает с соответствующим множителем в формуле Швингера [5] для вероятности рождения электрон-позитронных пар из вакуума в электрическом поле  $\mathcal{E}$ .

б) Если поля  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$  параллельны, то траектория релятивистской частицы представляет собой спираль переменного шага. Подбарьерная траектория получается из известных формул [13] с помощью аналитического продолжения по  $t$ , причем контур интегрирования в (4а) имеет тот же вид, что и на рис.1. В итоге

$$\text{Im}W(p_\perp) = \frac{m^2}{2e\mathcal{E}} \Phi(\epsilon_0) + \text{sh} \left( \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{E}} \arccos \epsilon_0 \right) \frac{p_\perp^2}{2e\mathcal{H}} + \dots \quad (7)$$

Интегрируя (4), (7) по  $p_\perp$ , получаем

$$w(\mathcal{E}, \mathcal{H}) / w(\mathcal{E}, 0) = \sigma / \text{sh} \sigma, \quad \sigma = \mathcal{H} \mathcal{E}^{-1} \arccos \epsilon_0. \quad (8)$$

Для нерелятивистских связанных состояний  $\epsilon_0 = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 \kappa^2 \rightarrow 1$  ( $\alpha = e^2 / \hbar c = = 1/137$ ,  $\kappa \sim 1$ ). Поэтому  $\sigma = \alpha \kappa \mathcal{H} / \mathcal{E}$  совпадает с введенным в [3] параметром  $\gamma$ , а из (8) следует правильное выражение для предэкспоненты  $P = \gamma / \text{sh} \gamma$  в случае ионизации отрицательного иона [4,14]. В другом пределе,  $\epsilon_0 = -1$ , имеем  $\sigma = \pi \mathcal{H} / \mathcal{E}$  и (8) согласуется с первым членом швингеровского разложения [5,6] для мнимой части эффективной функции Лагранжа в скалярной электродинамике:

$$w_0(\mathcal{E}, \mathcal{H}) = \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{E} \mathcal{H} [\text{sh}(\pi \mathcal{H} / \mathcal{E})]^{-1} \exp(-\pi F_{cr} / \mathcal{E}) \quad (9)$$

(при условии<sup>1)</sup>  $\mathcal{E}, \mathcal{H} \ll F_{cr}$  следующие члены этого разложения экспоненциально малы по сравнению с (9)).

ММВ позволяет получить формулу типа (9) также и для фермионов, нужно лишь ввести спиновую добавку

$$\frac{ie}{2m} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \int F^{\alpha\beta} u^\mu s^\nu ds = \frac{e}{m} \int \{ (s\vec{\mathcal{H}}) - (vs)(v\vec{\mathcal{H}}) + [vs]\vec{\mathcal{E}} \} dt$$

<sup>1)</sup> Это условие необходимо для применимости квазиклассики и заведомо выполняется на опыте (для электронов  $F_{cr} = 1.32 \cdot 10^{16}$  В/см, или  $4.41 \cdot 10^{13}$  Гс).

к функции действия, вклад которой при изменении  $t$  вдоль петли на рис.1с рассчитывается с помощью уравнений Баргмана-Мишеля-Телегди [15] для спина  $s=1/2$  во внешнем поле. В итоге для  $w_{1/2}(\mathcal{E}, \mathcal{H})$  можно получить [16] формулу (9), в которой  $(\text{sh}\sigma)^{-1}$  заменяется на  $2\text{cth}\sigma$ ,  $\sigma = \pi\mathcal{H}/\mathcal{E}$ . Эта формула определяет вероятность рождения электрон-позитронных пар из вакуума в параллельных полях (в отличие от (6), вероятности  $w_0$  и  $w_{1/2}$  относятся к инвариантному 4-объему  $VT=1$  и имеют размерность  $m^4$ , или  $\text{см}^{-3}\cdot\text{с}^{-1}$ ).

в) Пусть  $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{\mathcal{H}}$  и  $\rho = \mathcal{E}/\mathcal{H} < 1$ . Такая конфигурация полей возникает в системе покоя атома, движущегося в постоянном магнитном поле (лоренцева ионизация [17]). Если скорость атома  $v$  направлена под углом  $\varphi$  к магнитному полю (в лабораторной системе отсчета), то

$$\rho = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\Gamma^2}\right) / \left(1 + \frac{\text{ctg}^2\varphi}{\Gamma^2}\right)} = \begin{cases} v_{\perp}/c, & v \ll c \\ 1 - (2\Gamma^2 \sin^2\varphi)^{-1}, & \Gamma \gg 1, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\Gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  - лоренц-фактор. Экстремальная подбарьерная траектория, минимизирующая  $\text{Im } W$ , определяется в параметрическом виде<sup>2)</sup>:

$$x = \frac{im}{e\mathcal{H}} \cdot \frac{a\rho}{(1-\rho^2)^{3/2}} \left( \tau - \frac{\tau_0}{\text{sh}\tau_0} \text{sh}\tau \right), \quad y = \frac{m}{e\mathcal{H}} \cdot \frac{a\rho}{1-\rho^2} \cdot \frac{\tau_0}{\text{sh}\tau_0} (\text{ch}\tau_0 - \text{ch}\tau),$$

$$z = 0, \quad t = \frac{im}{e\mathcal{H}} \cdot \frac{a}{(1-\rho^2)^{3/2}} \left( \tau - \rho^2 \frac{\tau_0}{\text{sh}\tau_0} \text{sh}\tau \right). \quad (11)$$

Из (2) вытекают уравнения для определения констант  $a$  (интеграл движения) и  $\tau_0$ :

$$\frac{\text{th}\tau_0}{\tau_0} = \frac{\rho^2 a}{a - (1 - \rho^2)\epsilon_0}, \quad \text{ch}\tau_0 = \frac{a - (1 - \rho^2)\epsilon_0}{\rho\sqrt{a^2 + \rho^2 - 1}}, \quad (12)$$

причем начальный момент подбарьерного движения  $t_0 = \frac{im}{e\mathcal{H}} \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon_0 \text{th}\tau_0 / (\frac{\text{th}\tau_0}{\tau_0} - \rho^2)$ . Вероятность ионизации равна (с экспоненциальной точностью)

$$w \propto \exp\{-F_{cr}\mathcal{E}^{-1}\Phi(\epsilon_0, \rho)\}, \quad \Phi = \rho\tau_0(1 - \rho^2)^{-1/2}(1 - \epsilon_0 a). \quad (13)$$

Обсудим некоторые частные случаи. При  $\epsilon_0 \rightarrow 1$  удобно перейти к атомным единицам:

$$w = \frac{me^4\kappa^2}{2\hbar^3} |A_{\kappa}|^2 \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_a} \exp\left\{-\frac{2\kappa^3\mathcal{E}a}{3\mathcal{E}} \left[1 + \alpha^2 \frac{\kappa^2}{30\mathcal{E}^2} \left(\mathcal{H}^2 - \frac{9}{4}\mathcal{E}^2\right)\right]\right\}, \quad (14)$$

что дает вероятность ионизации отрицательного иона с учетом поправки порядка  $\alpha^2$ . Здесь  $\mathcal{E}_a = \alpha^3 F_{cr}$  - атомная единица напряженности электрического поля,  $\kappa = \sqrt{E_b/I_H}$ ,  $I_H$  - потенциал ионизации атома водорода. Отметим удивительно высокую точность этого приближения: даже при  $E_0 = 0$  (то есть для уровня, энергия связи которого равна энергии покоя) погрешность выражения, стоящего в (14) в экспоненте, составляет 2% в случае электрического поля и всего лишь 0.2% в случае скрещенных полей.

<sup>2)</sup> Здесь  $\tau$  - параметр, пропорциональный собственному времени частицы  $s$ .

При  $\rho \rightarrow 0$  (выключение электрического поля) имеем

$$w \propto \exp\{-\epsilon_b^2 F_{cr} \mathcal{H} / \mathcal{E}^2\}, \quad \epsilon_b = E_b / m = 1 - \epsilon_0, \quad (15)$$

где  $\mathcal{E} \ll \mathcal{H} \ll F_{cr}$ . Наконец, в случае  $\rho \rightarrow 1$  (скрещенные поля, то есть  $\mathcal{E} \perp \mathcal{H}$  и  $\mathcal{E} = \mathcal{H}$ )

$$\Phi(\epsilon_0, \rho = 1) = 2\sqrt{3} \frac{\xi^3}{1 + \xi^2}, \quad \xi = \left[ 1 - \frac{1}{2}\epsilon_0 \left( \sqrt{\epsilon_0^2 + 8} - \epsilon_0 \right) \right]^{1/2} \quad (16)$$

В частности,  $w \propto \exp(-9F_{cr}/2\mathcal{E})$  при  $\epsilon_0 = -1$ . В отличие от вероятности рождения пар из вакуума, которая для скрещенных полей обращается в нуль [5], здесь вероятность  $w$  отлична от нуля. Это объясняется тем, что в данном случае имеется выделенная система отсчета (где атом покоится), и переход в лоренцеву систему, в которой поле  $\mathcal{E}$  может быть сделано сколь угодно малым, качественно меняет постановку задачи.

При  $\mathcal{E} > \mathcal{H}$  формулы могут быть получены из (11)–(13) с помощью аналитического продолжения:  $(1 - \rho^2)^{1/2} \rightarrow i(\rho^2 - 1)^{1/2}$ ,  $\tau \rightarrow i\tau$ , причем "время"  $t$  в подбарьерном движении остается чисто мнимым.

Функция  $\Phi(\epsilon_0, \rho)$  приведена на рис.2 для электрического поля ( $\rho = \infty$ ), для случая скрещенных полей ( $\rho = 1$ ), а также при  $\rho = 1/2$  и  $1/4$ . Включение магнитного поля (при фиксированном  $\mathcal{E}$ ) уменьшает вероятность ионизации, стабилизируя уровень. Это легко понять в рамках ММВ: с ростом  $\mathcal{H}$  подбарьерная траектория "закручивается" и ширина барьера возрастает.

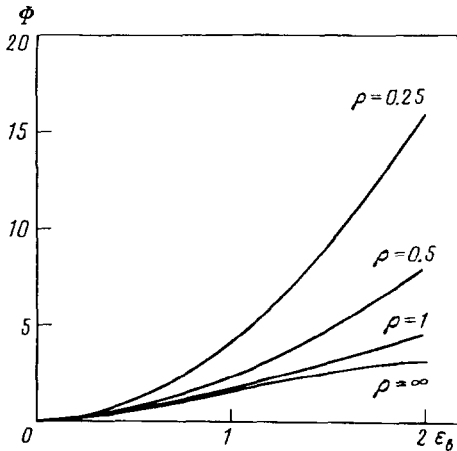


Рис.2. Функция  $\Phi$  в уравнении (13) в зависимости от энергии связи уровня,  $\epsilon_b = (m - E_0)/m$ . У кривых указаны значения отношения  $\rho = \mathcal{E}/\mathcal{H}$

4. Кулоновское взаимодействие входит в (4а) так же, как и в нерелятивистском случае, поэтому его вклад может быть учтен по формуле теории возмущений в ММВ

$$\delta W = -i\eta \ln \mu r_1 + Z\alpha \int_{t_1}^0 [r_0^2(t)]^{-1/2} dt, \quad (17)$$

где  $r_1 = [r_0^2(t_1)]^{1/2}$ ,

$$\eta = Z\alpha\epsilon_0 (1 - \epsilon_0^2)^{-1/2}, \quad \mu = m\sqrt{1 - \epsilon_0^2}, \quad (17a)$$

$r_1$  - точка сшивания, выпадающая из окончательного ответа. Если экстремальная подбарьерная траектория  $r_0(t)$  известна аналитически (как, например, в (1) или (11)), то вычисление кулоновской поправки сводится к квадратурам. Так, экстремальная траектория получится из (1) при  $p_{\perp} = 0$  и  $M = m$ . Вычисляя интеграл в (17), находим кулоновский фактор  $Q = \exp(-2 \operatorname{Im} \delta W)$ :

$$Q = [2(1 - \epsilon_0^2)^{3/2} F_{cr}/\mathcal{E}]^{2\eta} \exp(2Z\alpha \operatorname{arccos}\epsilon_0), \quad (18)$$

где  $Z$  - заряд атомного остова ( $Z = 1$  для нейтральных атомов,  $Z = 0$  для отрицательного иона; в последнем случае  $Q = 1$ ).

Перемножая (6) и (18), получаем вероятность ионизации в электрическом поле ( $\mathcal{H} = 0$ ). Подчеркнем, что в этом случае определены как экспоненциальный множитель в  $w$ , так и кулоновский фактор и предэкспонента. В частности, в нерелятивистском случае

$$w(\mathcal{E}, \epsilon_0) = \frac{me^4 \kappa^2}{\hbar^3} |A_{\kappa}|^2 \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{1-2\eta} \times \exp\left\{-\frac{2}{3\epsilon} \left[1 - \frac{9}{8}\alpha^2 \left(\eta\epsilon \ln \epsilon + \frac{1}{15} + O(\epsilon)\right) \kappa^2 + \dots\right]\right\}, \quad (19)$$

где  $\eta = Z/\kappa$  - параметр Зоммерфельда и  $\epsilon = \mathcal{E}/\kappa^3 \epsilon_a \ll 1$ . По аналогии с (14) можно ожидать, что область применимости этого приближения "затягивается" вплоть до  $E_b \sim mc^2$ .

В случае полей сложной конфигурации кулоновский фактор можно рассчитать по уравнению (17) численно. Что касается предэкспоненты, то для ее вычисления следует рассмотреть пучок классических траекторий, близких к экстремальной, и найти квадратичную поправку к функции действия  $W$ . Примеры были даны выше, см. формулы (5) и (7).

Авторы благодарны В.В.Владимирскому и участникам теоретического семинара ИТЭФ за обсуждение полученных результатов. Работа частично поддерживалась Российским фондом фундаментальных исследований (проект 95-02-05417а).

- 
1. А.М.Переломов, В.С.Попов, М.В.Терентьев, ЖЭТФ **51**, 309 (1966).
  2. В.С.Попов, В.П.Кузнецов, А.М.Переломов, ЖЭТФ **53**, 331 (1967).
  3. В.С.Попов, А.В.Сергеев, Письма в ЖЭТФ **63**, 398 (1996).
  4. V.S.Popov, B.M.Karnakov, and V.D.Mur, Phys. Lett. A **225** (1997).
  5. J.Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
  6. *Quantum Electrodynamics*, Ed. J.Schwinger. N.Y.: Dover, 1964.
  7. Ю.Н.Демков, Г.Ф.Друкарев, ЖЭТФ **47**, 918 (1964).
  8. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Квантовая механика*, М.: Наука, 1974.
  9. W.Pieper and W.Greiner, Zeits. Phys. **218**, 327 (1969).
  10. В.С.Попов, Письма в ЖЭТФ **11**, 254 (1970); ЯФ **12**, 429 (1970).
  11. Я.Б.Зельдович, В.С.Попов, УФН **105**, 403 (1971).
  12. W.Greiner, B.Müller, and J.Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*. Berlin: Springer, 1985.
  13. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теория поля*. М.: Наука, 1988.
  14. С.П.Андреев, В.А.Полунин, Письма в ЖЭТФ **42**, 154 (1985).
  15. V.Bargmann, L.Michel, and V.L.Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).
  16. М.С.Маринов, В.С.Попов, ЯФ **15**, 1271 (1972).
  17. Б.М.Карнаков, В.Д.Мур, В.С.Попов, Письма в ЖЭТФ **65**, 391 (1997).