Письма в ЖЭТФ, том 66, вып.4, стр.228 - 231 © 1997г. 25 августа

ВЫРОЖДЕННЫЙ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНЫЙ БОЗЕ-ГАЗ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ

В.А.Алексеев[1),2)], *Д.Д.Крылова*

Физический институт им.П.Н.Лебедева РАН

117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 июня 1997 г.

В приближении парного взаимодействия между частицами при близкой к нулю температуре найдена поправка к энергии и число частиц в возбужденных осцилляторных состояниях. Показано, что в случае используемых в экспериментах ловушек, газ начинает заметно отличаться от идеального при захвате более $N = 1000$ частиц.

PACS: 05.30.Jp

В выполненных за последние два года экспериментах по конденсации Бозе–Эйнштейна удержание нейтральных атомов осуществлялось в ловушках, потенциал которых с хорошей точностью можно считать параболическим [1–3]. В настоящей статье в приближении парного взаимодействия при близкой к нулю температуре вычислена энергия таких атомов и предельное число частиц в основном осцилляторном состоянии. При этом использована методика, развитая Боголюбовым [4,5] для случая газа свободных частиц, которая в случае параболической ловушки значительно упрощается.

Гамильтониан системы N-частиц в приближении парного взаимодействия между частицами имеет вид [5]

$$\hat{H} = \sum_s \epsilon(s) a_s^+ a_s + \frac{1}{2} \sum_{s_1,s_2,s_1',s_2'} U_{s_1,s_2}^{s_1',s_2'} a_{s_1'}^+ a_{s_2'}^+ a_{s_1} a_{s_2}, \tag{1}$$

где $\epsilon(s)$ – энергия дискретного состояния s, которая отсчитывается от уровня с минимальной энергией $s = 0$, a_s^+, a_s – операторы рождения и уничтожения частицы в состоянии s,

$$U_{s_1,s_2}^{s_1',s_2'} = \langle s_1' s_2' | U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) | s_1 s_2 \rangle. \tag{2}$$

В случае параболической ловушки s – тройной индекс $\mathrm{s} = (s_x, s_y, s_z)$, а $\Psi_\mathrm{S}(\mathbf{r}) = \Psi_{s_x}(x)\Psi_{s_y}(y)\Psi_{s_z}(z)$ – волновые функции осциллятора

$$\Psi_s(x) = (R\sqrt{\pi} 2^s s!)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2R^2}\right) H_s\left(\frac{x}{R}\right), \quad R = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \tag{3}$$

где ω – частота осциллятора, m – масса атома, H_s – полином Эрмита.

При низких температурах во второй сумме в (1) можно сохранить лишь члены нулевого и первого порядка по числу частиц N, которыми являются $\frac{1}{2}U_0 a_0^4$ и $a_0^3(U_s^* a_s^+ + U_s a_s)$, $a_0 = \sqrt{N}$, $U_s = \langle 00|U|s0\rangle$. В итоге вместо (1) имеем

$$\hat{H} = \sum_s \epsilon(s) a_s^+ a_s + \frac{1}{2} N^2 U_0 + N^{3/2} \sum_{s\neq 0} (U_s^* a_s^+ + U_s a_s). \tag{4}$$

---

1) e-mail: valeks@sci.lebedev.ru

2) V.A.Alekseev

Тривиальной заменой

$$a_s^+ = b_s^+ - N^{3/2}\frac{U_s}{\epsilon(s)}, \quad a_s = b_s - N^{3/2}\frac{U_s^*}{\epsilon(s)}, \quad s \neq 0, \tag{5}$$

гамильтониан (4) приводится к диагональному виду

$$\hat{H} = \frac{1}{2}N^2 U_0 + \sum_s \epsilon(s) b_s^+ b_s - N^3 \sum_{s\neq 0} \frac{|U_s|^2}{\epsilon(s)}. \tag{6}$$

Энергия и химический потенциал при $T=0$ имеют вид

$$E_0 = \frac{1}{2}N^2 U_0 - N^3 \sum_{s\neq 0} \frac{|U_s|^2}{\epsilon(s)}, \quad \mu = \frac{\partial E_0}{\partial N} = NU_0 - 3N^2 \sum_{s\neq 0} \frac{|U_s|^2}{\epsilon(s)}. \tag{7}$$

Число частиц на уровне $s \neq 0$ равно среднему

$$N_s = \langle a_s^+ a_s \rangle = \left\langle \left(b_s^+ - N^{3/2}\frac{U_s}{\epsilon(s)}\right)\left(b_s - N^{3/2}\frac{U_s^*}{\epsilon(s)}\right)\right\rangle = n_s + N^3\frac{|U_s|^2}{\epsilon^2(s)}, \tag{8}$$

где $n_s = \langle b_s^+ b_s \rangle$ – среднее число квазичастиц, определяемое формулой распределения Бозе. При $T=0$ среднее число возбужденных квазичастиц ($s \neq 0$) равно нулю $n_s = 0$, и из (8) получаем, что на возбужденных уровнях находится $N^3 \sum\limits_{s\neq 0} \frac{|U_s|^2}{\epsilon^2(s)}$ истинных частиц, тогда как число частиц в основном состоянии

$$N_0 = N\left[1 - N^2 \sum_{s\neq 0} \frac{|U_s|^2}{\epsilon^2(s)}\right]. \tag{9}$$

В случае осцилляторных собственных функций (3) входящие в (7) и (9) суммы вычисляются практически точно. Для этого прежде всего заметим, что "эффективный размер" осциллятора R в случае характерных частот ловушки $\omega \sim 100\,\text{с}^{-1}$ и $m = 10^{-22}$ г равен $R \sim 10^{-3}$ см, что заведомо намного превышает эффективный радиус взаимодействия потенциала $U(\mathbf{r})$. Поэтому в матричных элементах (2) потенциал U можно считать δ-функцией, после чего U_S принимает вид

$$U_\text{S} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\hbar\bar{\omega}\frac{a}{\bar{R}}\prod_i (-1)^{n_i}\Omega_i^{1/2}\frac{((2n_i)!)^{1/2}}{2^{2n_i}(n_i)!}, \quad s_i = 2n_i, \tag{10}$$

$$U_\text{S} = 0, \quad s_i = 2n_i + 1, \quad n_i = 0, 1\ldots,$$

где $\bar{\omega} = \sqrt{(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)/3}$, $\Omega_i = \omega_i/\bar{\omega}$, $\bar{R} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$, a – длина рассеяния, связанная с потенциалом взаимодействия $U(\mathbf{r})$ соотношением [5]

$$\int U(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a.$$

Выражая через величины $\bar{\omega}$ и Ω_i энергию осцилляторного s уровня $\epsilon_\text{S} = \hbar\bar{\omega}(\text{s}\vec{\Omega})$, видим, что число частиц на уровне $\text{s} \neq 0$ равно

$$N_\text{S} = N^3\frac{1}{2\pi}\left(\frac{a}{\bar{R}}\right)^2\frac{1}{(\vec{\Omega}\text{n})^2}\prod_i \frac{\Omega_i(2n_i)!}{2^{4n_i}(n_i!)^2}, \quad s_i = 2n_i, \tag{11}$$

$$N_{\mathrm{S}} = 0, \quad s_i = 2n_i - 1, \quad n_i = 1, 2, \ldots,$$

то есть заселены только уровни с четными s_i. С учетом (10) входящие в (7) и (9) суммы принимают вид

$$\sum_{\mathbf{n}\neq 0} \frac{|U_{\mathbf{s}}|^2}{\epsilon^{\nu}(\mathbf{s})} = \frac{2^{1-\nu}}{\pi}(\hbar\bar{\omega})^{2-\nu}\left(\frac{a}{\bar{R}}\right)^2 Q_{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \tag{12}$$

$$Q_{\nu} = \sum_{\mathbf{n}\neq 0} \frac{1}{(\mathbf{n}\vec{\Omega})^{\nu}} \prod_{i=1}^{3} \frac{\Omega_i (2n_i)!}{2^{4n_i}(n_i!)^2}.$$

Записывая $(\mathbf{n}\vec{\Omega})^{-\nu}$ в виде интеграла

$$(\mathbf{n}\vec{\Omega})^{-\nu} = \int_0^{\infty} u^{\nu-1} du \exp(-(\mathbf{n}\vec{\Omega})u), \quad \nu = 1, 2,$$

и используя значение суммы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (2k)!}{(k!)^2} = (1 - 4t)^{-1/2},$$

в (12) можно выполнить суммирование по n_i, после чего Q_{ν} принимает вид

$$Q_{\nu} = \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \int_0^{\infty} u^{\nu-1} \left[\prod_i \left(1 - \frac{1}{4}\exp(-u\Omega_i)\right)^{-1/2} - 1\right] du. \tag{13}$$

В случае изотропной ловушки $\bar{\omega} = \omega$, $\Omega_i = 1$, $Q_1 \approx 0.45$, $Q_2 \approx 0.41$ и выражения для энергии основного состояния и числа частиц в основном состоянии при $T = 0$ принимает вид

$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hbar\omega \frac{a}{R} N^2 \left[1 - 0.36\frac{a}{R}N\right], \tag{14}$$

$$N_0 = N\left[1 - 0.065\left(\frac{a}{R}N\right)^2\right]. \tag{15}$$

Величина Na/R приблизительно равна отношению средней энергии взаимодействия одного атома $\bar{E} = \frac{N}{R^3}\int U(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \frac{N}{R^3}\frac{\hbar^2}{m}a$ с окружением к энергетическому расстоянию между осцилляторными уровнями, что проясняет появление этой величины как параметра разложения в (14) и (15). Естественно, в рассматриваемом подходе число частиц в основном состоянии N_0 должно слабо отличаться от полного числа частиц N. Из (15) видно, что в возбужденных состояниях при $T = 0$ находится относительное число частиц равное $(N - N_0)/N = 0.065(Na/R)^2$. Потребовав, чтобы эта величина не превышала значение 0.1, получим критерий, при котором атомы в ловушке можно считать идеальным газом $(Na/R)^2 \leq 1.5$. Отсюда следует, что газ начинает отличаться от идеального при числе частиц $N \geq R/a \approx 3000$ ($R \approx 3 \cdot 10^{-4}$ см, $a \approx 10^{-7}$ см), типичном для проводимых экспериментов [1–3]. При этом критерий применимости приближения парного взаимодействия $N \ll (R/a)^3 \sim 10^{10}$ выполняется с большим запасом.

Как видно из (5), средние значения $< a_s >= -N^{3/2}(U_s^* / \epsilon_s)$ отличны от нуля, что указывает на формирование когерентной волновой функции конденсата $\Psi = a_0\psi_0 + \sum_{s\neq 0} < a_s > \psi_s$.

Использованный здесь метод диагонализации Гамильтониана позволяет найти свойства только стационарных состояний системы. Выпадающие из этого рассмотрения метастабильные состояния были рассмотрены в [6].

Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (96-02-18695) и ГНТП "Метрология".

1. M.H.Anderson, J.R.Ensher, M.R.Matthews et al., Science **269**, 198 (1995).
2. C.C.Bradley, C.A.Sackett, J.J.Tolett et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
3. K.B.Davis, M.-O.Mewes, M.R.Andrews et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
4. N.Bogoljubov, J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947).
5. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика*, часть II. М.: Наука, 1978.
6. Yu.Kagan, G.V.Shlyapnikov, J.T.M.Walraven, Phys. Rev. Lett. **76**, 2670 (1996).