РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА
В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ *ТОМ 66, ВЫПУСК 11*
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД *10 ДЕКАБРЯ, 1997*

Письма в ЖЭТФ, том 66, вып.11, стр.673 - 678 © 1997г. 10 декабря

ГАМИЛЬТОНОВА ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ОБОБЩЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В.Г.Марихин

Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН
142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 9 октября 1997 г.,
После переработки 30 октября 1997 г.

Предлагается метод построения интегрируемых систем, а также преобразований Бэклунда для них. Подробно обсуждается случай интегрируемых обобщений нелинейного уравнения Шредингера в одномерном случае, а также возможность обобщения метода на случай высших размерностей. В качестве критерия интегрируемости используется факт наличия преобразований Бэклунда определенного вида у рассматриваемых систем, что приводит к "фиксированию калибровки" – число физически различных интегрируемых систем сильно уменьшается. Метод может быть полезен для построения допустимых нелинейных членов в некоторых моделях квантовой теории поля, например в функционалах Гинзбурга – Ландау.

PACS: 03.20.Jr, 03.65.-w, 47.20.Ky

1. Критерий интегрируемости и выбор калибровки. В теории интегрируемых систем хорошо известно нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), а также ряд систем, его обобщающих, которых известно несколько десятков (см., например, [1]). Существует много критериев интегрируемости таких систем, которые, по-видимому, связаны друг с другом, поэтому естественно выбрать такой критерий, который, с одной стороны, позволит выделять только действительно различные системы, с другой стороны, этот критерий не должен затенять физическую причину интегрируемости этих систем.

В данной работе используется следующий критерий: существует каноническое преобразование, не меняющее гамильтониана системы, тем самым действие $S = \int dtdx(pq_t - H)$ инвариантно, а значит, полученное преобразование является преобразованием Бэклунда (ПБ) (о связи ПБ и метода обратной задачи см. [2,6]) для данной системы, то есть переводит одно решение в другое.

Целью работы является не столько построение полной классификации интегрируемых систем (хотя она будет получена для одномерных систем типа НУШ в простом и сжатом виде), сколько выявление их дискретных симметрий в физически ясной форме, играющих в теории интегрируемых систем почти такую же роль, как и непрерывные симметрии в калибровочных теориях.

В конце работы мы рассмотрим возможность обобщения метода на двумерный, в частности приведем вид гамильтониана и ПБ для системы Дэви-Стюартсона, а также обсудим возможные физические приложения.

Итак, рассмотрим системы вида

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + F(u_x, v_x, u, v), \\ -v_t &= v_{xx} + G(u_x, v_x, u, v). \end{aligned} \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что при подстановке

$$F = uv^2, \quad G = u^2 v, \quad u = \psi, \quad v = \psi^*,$$

система (1) переходит в обычное нелинейное уравнение Шредингера. Приведем еще один интересный пример - при подстановке [1]

$$n_- = 2/(u-v), \quad n_+ = -2uv/(u-v), \quad n_3 = (u+v)/(u-v),$$

известная модель Гейзенберга (или модель n-поля, $\mathbf{n}_t = \mathbf{n}_{xx} \times \mathbf{n}$) переходит в $u-v$-систему, если $F = -2u_x^2/(u-v)$, $\quad G = 2v_x^2/(u-v)$. Обычный путь доказательства интегрируемости состоит в том, чтобы определить, при каких F и G система (1) совместна. Мы, однако, перейдем сразу к гамильтонову формализму. Потребуем, чтобы первое уравнение Гамильтона, а именно, $q_t = \delta H/\delta p$, сразу выдавало одно из уравнений $u-v$-системы (1)(например, на v). Уже это требование сильно ограничивает вид гамильтониана:

$$H = p_x q_x + h(q_x, q, p); \tag{2}$$

здесь $q = v$, импульс p необходимо выразить через u и v, но важно, что функция h не зависит от p_x.

Очевидно, что существует и дуальное представление к (2), а именно:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\hat{p}_x \hat{q}_x + \hat{h}(\hat{q}_x, \hat{q}, \hat{p}), \\ \hat{q} &= u, \quad \hat{p} = \hat{p}(u,v), \end{aligned} \tag{3}$$

которое при варьировании по $\hat{p}$ дает уравнение на u системы (1). Чтобы еще больше конкретизировать вид гамильтониана, а также связать гамильтонианы H и $\hat{H}$, сформулируем условия интегрируемости:

1. Существуют ПБ $B(p,q) = (\tilde{p}, \tilde{q})$, сохраняющие гамильтониан и скобки Пуассона инвариантными (в случае систем типа НУШ скобки Пуассона можно всегда выбрать тривиальными – $\{p,q\} = 1$, но технически более удобно не следить за скобками, а потребовать инвариантность временной части действия, в данном случае - pq_t).

2. Преобразования B можно представить в виде композиции двух "калибровочных" преобразований B_p и B_q, таких, что

$$\begin{aligned} &B_p(p,q) = (\tilde{p}, q): \quad p = \tilde{p} + \tfrac{\delta T[q]}{\delta q}, \\ &B_q(\tilde{p}, q) = (\tilde{p}, \tilde{q}): \quad q = \tilde{q} + \tfrac{\delta S[\tilde{p}]}{\delta \tilde{p}}, \\ &B = B_q B_p. \end{aligned} \tag{4}$$

3. Следующим условием является дуальность. Гамильтониан под действием B_p и B_q преобразуется как

$$H(p,q) \to \hat{H}(\tilde{p},q) \to H(\tilde{p},\tilde{q}). \tag{5}$$

Отметим, что преобразования B_p и B_q сильно напоминают калибровочное преобразование векторного потенциала $A_\mu = \tilde{A}_\mu + \partial_\mu f$; проводя аналогию, можно обнаружить интересный факт - действие интегрируемой системы является калибровочно инвариантным буквально: гамильтониан H под действием канонического преобразования B вообще не преобразуется!

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы найти конкретный вид преобразований (1) и указать возможные функции h.

2. Преобразования Бэклунда и гамильтонианы $u - v$ систем. Из-за вида B_p гамильтониан является полиномом второй степени по p:

$$H = p_x q_x + a(q_x,q)p^2 + b(q_x,q)p + c(q_x,q). \tag{6}$$

Можно разделить все гамильтонианы (6) на два класса:

1. Первый класс – это системы с трансляционной инвариантностью. В этом случае коэффициенты a, b и c не зависят от q, а только от q_x. Эти системы обладают законами сохранения типа "плотность – ток", ПБ особенно просты:

$$B_p : \frac{\delta T}{\delta q} = \frac{q_{xx}}{a(q_x)}. \tag{7}$$

Дуальность в этом случае имеет вид $p \to q_x$. Итак, приведем самый общий вид интегрируемых гамильтонианов с трансляционной инвариантностью:

$$H = p_x q_x + p^2 a(q_x) + pb(q_x) + c(q_x). \tag{8}$$

Из-за дуальности функции a, b, c – полиномы второй степени по q_x.

2. "Магнитные" системы представляют более сложный пример интегрируемых $u - v$-систем. Можно показать, что в этом случае величины b и c зависят лишь от q, но не от q_x. Что касается величины a, то она имеет вид $a = q_x^2 + r(q)$. Гамильтониан в этом случае:

$$H = p_x q_x - p^2 q_x^2 - p^2 r(q) - p\frac{r'(q)}{2} - \frac{r''(q)}{12}. \tag{9}$$

ПБ и в этом случае довольно просты:

$$p = \tilde{p} - \frac{q_{xx} + r'(q)}{q_x^2 + r(q)}, \quad q = \tilde{q} + \frac{1}{\tilde{p}}.$$

Мы получили важный результат: в терминах Гамильтона существует только две интегрируемые системы типа НУШ, а именно, (8) с законом сохранения импульса и (9) без такового. Для того чтобы понять, какие $u - v$-системы являются интегрируемыми, необходимо построить соответствие $(p,q) \to (u,v)$. В следующих разделах мы обсудим возможные варианты, а также укажем соответствующие $u - v$-системы.

3. Переход к $u - v$-системам. Этот переход возможен двумя различными путями – можно предполагать, что дуальность эквивалентна тождественности, то есть рассматривать случай $p = \hat{p}$ либо рассматривать общий случай. Конечно, первый путь более прост, $p = g(u-v)$ и мы сразу приведем ответы для случаев с законом сохранения импульса:

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + 2a(u_x)g(u-v) + b(u_x),\\
-v_t &= v_{xx} + 2a(v_x)g(u-v) + b(v_x)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$g' = \tilde{a}(g)$– полином второй степени, и без него (модель Ландау – Лифшица [1]):

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - 2\tfrac{u_x^2 + r(u)}{u-v} + \tfrac{r'(u)}{2},\\
-v_t &= v_{xx} + 2\tfrac{v_x^2 + r(v)}{u-v} + \tfrac{r'(v)}{2},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где r – полином четвертой степени. В следующем разделе мы рассмотрим самое нетривиальное обобщение НУШ – случай без закона сохранения импульса и с его нетривиальной зависимостью от u и v – обобщенную модель Ландау – Лифшица, а в этом разделе выведем эту зависимость для p и $\hat{p}$ и построим "магнитные" (импульс p зависит от скорости u_x, v_x) $u-v$-системы с трансляционной инвариантностью. Можно показать, что импульсы p и $\hat{p}$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
p &= f(u-v)u_x + g(u-v),\\
\hat{p} &= f(u-v)v_x + g(u-v);
\end{aligned}
\tag{12}
$$

действительно, $\hat{p} - p$ есть полная производная, то есть импульсы связаны калибровочным преобразованием. Интегрируемость в этом случае в терминах дуальности гласит:

$$H(p,q) = \hat{H}(\hat{p},\hat{q}), \tag{13}$$

что приводит к соотношениям на функции f и g :

$$
\begin{aligned}
&2g = f'/f + \alpha f, \quad (f')^2 = \gamma f^4 + c_1 f^3 + c_2 f^2,\\
&a(x) = x^2 + \alpha x + \beta, \quad \gamma = \alpha^2 - 4\beta.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

4. Гамильтониан и преобразования обобщенной модели Ландау – Лифшица. Рассмотрим обобщенную модель Ландау – Лифшица (см., например, [1]) в виде $u-v$-системы:

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + \tfrac{1}{h}(2v_x - h_u)(u_x^2 + r(u)) + \tfrac{r'(u)}{2},\\
-v_t &= v_{xx} - \tfrac{1}{h}(2u_x + h_v)(v_x^2 + r(v)) + \tfrac{r'(v)}{2}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Здесь $h(u,v)$– симметрический полином степени 2 по каждой из переменных, $r(u) = 1/4(2h_{vv}h - h_v^2)$.

Покажем, что система (15) является следствием двух пар уравнений Гамильтона. Введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
&q = v, \quad p = -\tfrac{1}{h}(\hat{q}_x + \tfrac{h_q}{2}),\\
&\hat{q} = u, \quad \hat{p} = -\tfrac{1}{h}(q_x - \tfrac{h_{\hat{q}}}{2}),\\
&h = h(\hat{q}, q).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Построим теперь два гамильтониана:

$$
\begin{aligned}
H &= p_x q_x - p^2(q_x^2 + r(q)) - p\tfrac{r'(q)}{2} - \tfrac{r''(q)}{12},\\
\hat{H} &= -\hat{p}_x \hat{q}_x - \hat{p}^2(\hat{q}_x^2 + r(\hat{q})) + \hat{p}\tfrac{r'(\hat{q})}{2} - \tfrac{r''(\hat{q})}{12}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Нетрудно убедиться, что варьирование H по p дает уравнение на v системы (15); аналогично, варьирование $\hat{H}$ по $\hat{p}$ дает уравнение на u, но самое главное, оказывается, что с точностью до полных производных гамильтонианы H и $\hat{H}$ совпадают:

$$\hat{H}(\hat{p},\hat{q}) = H(p,q), \tag{18}$$

более того, совпадают и лагранжианы: $\hat{L} = L$.

Очевидно, нужно сделать необходимые пояснения: казалось бы, было бы естественным выбрать один из гамильтонианов, например H, проварьировать его по p и q, получив при этом сразу систему (15). На этом пути возникают определенные трудности: уравнение на v получается сразу , а вместо уравнения на u мы получили бы его ковариантное следствие (то есть уравнение вида $(\partial_x - f)(u_t - u_x x - F(u_x, v_x, u, v)) = 0$, см. (1)). Сравнивая теперь (9) и (17), мы видим, что в терминах Гамильтона системы (11) и (15) совпадают.

Преобразования Бэклунда:

$$\hat{p}(U,V) - p(u,v) = \frac{v_{xx} + r'(v)/2}{v_x^2 + r(v)}, \quad U = v, \tag{19}$$

переводят решение (u,v)-системы (15) в решение (U,V).

5. Заключение. Мы использовали инвариантность действия относительно преобразований Бэклунда для построения интегрируемых систем и их ПБ. Поскольку эти преобразования предполагались каноническими, инвариантность действия эквивалентна инвариантности гамильтониана; кроме того, такой выбор ПБ сильно уменьшил (с точностью до замен) список интегрируемых систем путем фиксирования калибровки. Метод легко может быть применен к таким одномерным интегрируемым системам как КдВ, Sine-Gordon, и т.д., а кроме того, виден путь обобщения метода на двумерный. Надо отметить, что в двумерном случае уже не хватает только пары переменных p и q, необходимо вводить нелокальные переменные (сравни с [3]). Приведем конкретный пример: хорошо известная двумерная $u - v$-система Дэви – Стюартсона

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 2(uV)_x, \\ v_t &= -v_{xx} + (V^2)_y + 2u_x, \quad V_y = v_x, \end{aligned} \tag{20}$$

имеет простое гамильтоново представление:

$$H = p_x q_x + p q_x^2 + p P_x, \tag{21}$$

при этом $P_y = p, \quad v = q_y, \quad u = p$, которое вполне укладывается в схему, описанную выше, если заметить, что величины a, b, c в (6) могут быть не только функциями, но и самосопряженными операторами, в данном случае $a = \partial_x \partial_y^{-1}$.

Полученные ПБ позволяют размножать решения рассматриваемых систем, что, по-видимому, указывает на их интегрируемость; кроме того, с ПБ тесно связаны преобразования Миуры [4], позволяющие получать согласованные пары скобок Пуассона и проводить стандартную схему Ленарда – Магри [5] построения первых интегралов.

По-видимому, метод может быть применен, например, к классификации возможных типов взаимодействия в действии некоторой теории поля. Рассмотрим, к примеру , функционал Гинзбурга – Ландау с зависимостью от времени. Выбор квадратичных членов в этом функционале единственный, как и в обычном НУШ, чего нельзя сказать о высших членах. Конечно, развитая теория не имеет прямого обобщения на случай высоких размерностей в симметричном (по производным) случае, однако можно предположить, что вид вакуумных решений Гинзбурга – Ландау вдали от точки перехода, где и важны высшие члены, может быть оценен из одномерного решения. Пример, где такое продолжение работает, есть: в неупорядоченном металле, вдали от края подвижности, основной вклад в плотность состояния происходит от симметричного инстантона. Хорошо известно, что асимптотика и вклад в действие для такого инстантона, с точностью до числа, одинаков для любой размерности и определяется симметрией члена четвертого порядка; таким образом, проанализировав симметрию таких членов, опираясь на развитый выше метод, можно попытаться продолжить теорию Гинзбурга – Ландау с временной зависимостью на область вдали от точки перехода.

В заключение автор благодарит А. Б. Шабата за постановку задачи и полезные обсуждения.

1. А.В.Михайлов, А.Б.Шабат, Р.И.Ямилов, Успехи Мат. Наук **42**(4), 3 (1987).
2. R.M.Miura, Lect. Notes in Math. **515** (1976).
3. A.B.Shabat. and R.I.Yamilov, Phys. Lett. A **227**, 15 (1997).
4. R.M.Miura, J. Math. Phys. **9**, 1202 (1968).
5. F.A.Magri, J. Math. Phys. **19**, 1156 (1978).
6. А.Б.Шабат, В.Э.Адлер, ТМФ **113** (3), 323 (1997).