Письма в ЖЭТФ, том 33, вып.6, стр. 350 – 353 *20 марта 1981 г.*

АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНСТАНТОННОГО ВКЛАДА В β-ФУНКЦИЮ В ТЕОРИИ ЯНГА – МИЛЛСА

Э.М.Ильгенфриц, Д.И.Казаков, М.Мюллер-Пройскер

Проведено вычисление лидирующего вклада инстантонов в перенормировку заряда. Получен быстрый рост β-функции в области $g \approx \approx 1$, что находится в соответствии с экстраполяцией результатов для режима сильной связи на решетке.

В настоящее время интересной является проблема интерполяции β-функции между режимами слабой и сильной связи [1, 2] в теории Янга – Миллса ($SU(N)$). Единственный до сих пор в рамках континуального подхода механизм, позволяющий выйти за рамки обычной теории возмущений, хотя и для малых g, предложен Калланом, Дашеном и Гроссом (КДГ) [3]. Их анализ содержит, однако, довольно искусственные с точки зрения обычной теории поля компоненты: "инстантонная среда" и "проницаемость вакуума" μ_{vac} используются для мультипликативной перенормировки полей и заряда вида

$$g_{ren}(1/a) = \mu_{vac}(\rho_c)\, g^2(1/a), \quad g^2(1/a) = \frac{8\pi^2}{b_N \ln(1/a\Lambda)}, \quad b_N = \frac{11N}{3}. \quad (1)$$

Здесь ρ_c есть инфракрасное обрезание по размеру инстантонов ρ, a — постоянная решетки эффективной решеточной теории с константой связи $g_{ren}(1/a)$. Для получения единственного размерного параметра КДГ приводят аргументы в пользу отождествления $\rho_c \approx a$. Независимо от возможности обоснования такого равенства, неясно, в какой мере уравнение (1) отражает ренормгрупповые свойства, известные в рамках теории возмущений.

В настоящей статье мы предлагаем иной, более привычный и прямой, путь оценки инстантонных вкладов в β-функцию, а именно рассмотрение лидирующих радиационных и квазиклассических поправок в трех- и двухточечные функции Грина в теории Янга – Миллса. Мы используем для этого приближение разреженного инстантонного газа (ПРГ) [4] без учета (дипольных) взаимодействий между инстантонами. Таким образом, в инстантонном секторе в главном порядке по g_0^2 вклад в функции Грина дают лишь классические поля $A^{inst} \sim 0(1/g_0)$ с весом, равным одноинстантонной амплитуде $d(\rho)$, в однопетлевом приближении [5]

$$d(\rho) = C_N x_0^{2N} e^{-x_0} (M_\rho)^{b_N} e^{-A(\bar{\rho})\rho^2} \rho^{-4}, \quad x_0 = \frac{8\pi^2}{g_0^2} . \qquad (2)$$

Здесь g_0 есть неренормированный заряд, M – параметр регуляризации Паули – Вилларса. Экспоненциальное обрезание соответствует твердому кору, обеспечивающему разреженность газа, предложенному в [6], причем $A(\bar{\rho}) = a_N/\bar{\rho}^2$, где $a_N = (b_N - 4)/2$, а $\bar{\rho}$ есть средний размер инстантонов, однозначно связанный с параметром разреженности a', который контролирует малость взаимодействия между двумя (анти) инстантонами, $|x_1 - x_2|^4/\rho_1^2\rho_2^2 > a'$. Оценка параметра a' из условия положительности действия дает [6] $a' \gtrsim 0(100)$.

Используя фурье-образ инстантона в сингулярной калибровке мы получаем неренормированную неампутированную трехточечную функцию в симметричной точке $k_i k_j = -k^2 \frac{1-3\delta_{ij}}{2}$ (в калибровке Ландау)

$$G^{a_1 a_2 a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3)|_{s.p.} = i(2\pi)^4 \delta(\Sigma k_i)\left[1 + \frac{61N}{12} x_0^{-1} \ln\frac{M}{k} + \frac{\pi^2 C_N}{N(N^2-1)} \times \right.$$

$$\left. \times x_0^{2N+2} e^{-x_0}\left(\frac{M}{k}\right)^{b_N} I(k\bar{\rho})(1 + 0(g_0^2))\right] \frac{1}{k^6} \Gamma^{(0)\,a_1 a_2 a_3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1, k_2, k_3) +$$

$$+ \ kkk \ \text{члены}. \qquad (3)$$

Здесь введены обозначения $\Gamma^{(0)}$ для голой трехглюонной вершины и

$$I(k\bar{\rho}) = 64\int \frac{d\rho'}{\rho'} \rho'^{\,b_N - 4} \left(1 - \frac{\rho'^2}{2} K_2(\rho')\right)^3 \exp\left[-a_N\left(\frac{\rho'}{k\bar{\rho}}\right)^2\right]$$

и учтена также расходящаяся часть однопетлевого вклада обычной теории возмущений. Таким же образом вычисляется лидирующий вклад в глюонный пропагатор.

Для перенормировки функций Грина можно выбрать процедуру минимальных вычитаний, когда константы Z содержат только логарифмически расходящиеся части. Тогда после перенормировки заряда инстантонные вклады становятся также хорошо определенными, однако, соответствующая β_{min} будет совпадать с обычным однопетлевым выражением [7]. Мы используем иную схему перенормировок, а именно схему импульсных вычитаний и требуем, чтобы ренормированные функции были нормированы в некоторой точке $k^2 = \mu^2$ на борновский член с заменой голой константы связи на ренормированную. Тогда уравнение (3) позволяет определить инстантонный вклда в комбинацию констант $Z_3^3 Z_1^{-1}$. Окончательно, с учетом знания константы ренормировки пропагатора Z_3, имеем

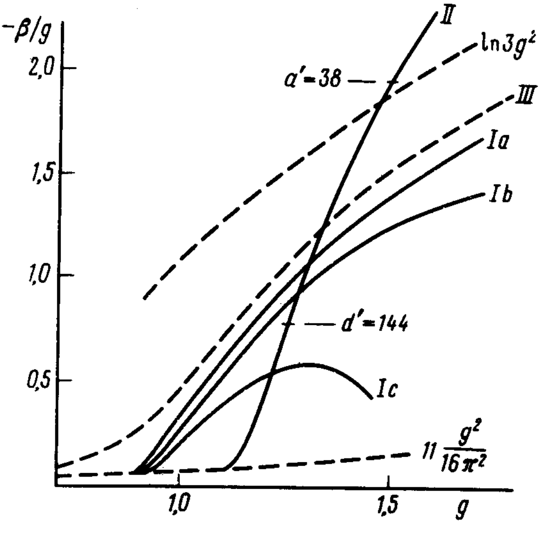
$$g_{ren} = Z_3^{3/2} Z_1^{-1}\left(\frac{M}{\mu}, \mu\bar{\rho}\right) g_0 = g_0 \left[1 + \frac{b_N}{2} x_0^{-1} \ln\frac{M}{\mu} + 0(g_0^4) + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi^2 C_N}{N(N^2-1)} x_0^{2N+2} e^{-x_0} (M/\mu)^{b_N} I(\mu\bar{\rho}) (1 + 0(g_0^2)) \right]. \qquad (4)$$

Инстантонный вклад в Z_3 не появился в уравнении (4), так как он подавлен как $0(g_0^2)$.

Используя выражение для однопетлевой бегущей константы связи $g(\mu)$ мы получим β-функцию как

$$\beta = g_0 \mu \frac{\partial}{\partial\mu} Z_3^{3/2} Z_1^{-1} = \beta(g(\mu), \bar{\rho}\Lambda), \quad g_{ren} = g_{ren}(g(\mu), \bar{\rho}\Lambda).$$

Произведение $\bar{\rho}(a')\Lambda$ выступает здесь в роли свободного параметра ограниченного лишь упоминавшимся ранее критерием разреженности газа.



β-функция в $SU(3)$ калибровочной теории с учетом инстантонных вкладов: I – схема импульсных вычитаний для различных степеней разреженности: (a) – $a' = 30$, $\bar{\rho}\Lambda_{latt} = 0{,}0055$; (b) – $a' = 114$, $\bar{\rho}\Lambda_{latt} = 0{,}0048$; (c) – $a' = 691$, $\bar{\rho}\Lambda_{latt} = 0{,}0040$. II – перенормировка КДГ [3] (уравнение (1)) с $a = \bar{\rho}(a')$ [6] (без учета взаимодействий инстантонов). III – Паде-экстраполяция разложения сильной связи на евклидовой решетке [1]. Штрихованные кривые показывают лидирующие члены разложения сильной и слабой связи соответственно

Для сравнения полученных результатов с вычислениями на евклидовой решетке мы должны выбрать соответствующую схему регуляризации, что равносильно изменению параметра Λ и общей константы C_N: $\Lambda_{PV}/\Lambda_{latt} = 31{,}3$ [8], $C_N^{PV}/C_N^{latt} = (\Lambda_{PV}/\Lambda_{latt})^{-b_N}$. На рисунке изображена полученная таким образом β-функция для нескольких значений параметра a'. Кривая с $a' = 114$ является еще допустимой, в то время как $a' = 30$ уже лежит в области, где ПРГ более не справедливо [6].

Следует отметить две отличительных черты: отрыв от однопетлевой β-функции происходит при $g \approx 0,9$ практически независимо от степени разреженности газа, наклон кривой хорошо соответствует Паде-экстраполяции β-функции для режима сильной связи [1].

Принятая нами схема перенормировки идейно очень далека от процедуры КДГ [3], результат которой [6] приведен на рисунке для сравнения. Согласно сравнению (1) разреженность газа меняется по мере приближения к кривой сильной связи. Тем не менее инстантонный газ достаточно разрежен, чтобы опрокинуть надежды на то, что инстантонные взаимодействия дадут плавный переход к режиму сильной связи. В нашей работе [6] мы отмечали, что в схеме перенормировки КДГ пересечение кривых неизбежно. Мы использовали этот факт для определения максимальной части пространства-времени занятого инстантонами, $f \approx 0,01$, возлагая надежды на иной механизм, который может неожиданно вступить в игру. В настоящей же формулировке, напротив, нет никакого пересечения, и разумно разреженный газ описывает всю переходную область весьма удовлетворительно. Дальнейшего выяснения требует вопрос, не испортит ли учет инстантонных взаимодействий и поправок высших порядков по g^2 полученной привлекательной картины.

Мы признательны Д.В.Ширкову и А.А.Владимирову за полезные замечания, а также В.В.Белокурову, Э.Вицореку и Б.Гейеру за обсуждения.

Объединенный
институт ядерных исследований

Поступила в редакцию
13 февраля 1981 г.

Литература

[1] J.Kogut, R.Pearson, J.Shigemitsu. Phys. Rev.Lett., **43**, 484, 1979.

[2] M.Creutz. Phys. Rev., **D21**, 2308, 1980.

[3] C.Callan, R.Dashen, D.Gross. Phys, Rev., **D20**, 3279, 1979.

[4] C.Callan, R.Dashen, D.Gross. Phys. Rev., **D17**, 2717, 1978.

[5] G.'t Hooft. Phys. Rev., **D14**, 3432, 1976; **D18**, 2199, 1978; C.Bernard. Phys. Rev., **D19**, 3013, 1979.

[6] Э.-М.Ильгенфриц, М.Мюллер-Пройскер. ОИЯИ Е2-80-547, Е2-80-639, Дубна 1980. Phys. Lett., to appear.

[7] A.Rouet. Phys. Lett., **78B**, 608, 1978.

[8] R.Dashen, D.Gross. The relationship between lattice and continuum definitions of the gauge theory coupling. IAS preprint, Princeton, 1980.