

Редукция модели XXZ с обобщенными периодическими граничными условиями

А. А. Белавин¹⁾, С. Ю. Губанов¹⁾

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 29 марта 2001 г.

Рассмотрена модель XXZ с обобщенными периодическими граничными условиями. Проанализирован способ вычисления спектра энергии, исходя из функционального уравнения на трансфер матрицу. В явном виде получены собственные значения гамильтониана.

PACS: 05.50.+q

Введение. Одной из самых простых моделей, описывающих одномерный кристалл, является цепочка двухуровневых атомов со взаимодействием ближайших соседей [1], предложенная Гейзенбергом еще в 1926 г. Гамильтониан анизотропной модели Гейзенберга – Изинга (модели XXZ) имеет следующий вид:

$$H_{XXZ} = 2J \sum_{n=1}^N (\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + \Delta \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z), \quad (1)$$

где J есть обменный интеграл Слетера, Δ – коэффициент анизотропии (в нашем случае $\Delta = \frac{1}{2}(q + q^{-1}) \equiv \cos(\eta)$, $q = e^{i\eta}$). В 1931 г. Бете предложил способ, позволяющий найти собственные векторы и собственные значения гамильтониана, и, тем самым, полностью решить задачу. Для этого необходимо решить трансцендентные уравнения Бете. В данной работе мы показываем, как можно в случае обобщенных периодических граничных условий получить явное выражение для спектра энергии, не решая при этом трансцендентных уравнений анзаца Бете.

Обобщенные периодические (*твистованные*) граничные условия таковы:

$$\sigma_{N+1}^{\pm} = q^{\pm 2\beta} \sigma_1^{\pm}, \quad \sigma_{N+1}^z = \sigma_1^z, \quad (2)$$

где $\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$. Проекция спина на ось z сохраняется: $S^z = \frac{1}{2}\sigma_1^z + \dots + \frac{1}{2}\sigma_N^z$, $[S^z, H_{XXZ}] = 0$. Энергии цепочек с разными параметрами твиста связаны друг с другом следующим образом [2]: спектр энергии в цепочке с параметром твиста β из сектора с $S^z = \beta - 1$ содержит в себе спектр энергии цепочки с параметром твиста $\beta - n$ из сектора $S^z = \beta - 1 + n$, где n – целое число:

$$E_{S^z=\beta-1}^{(\beta)} = E_{S^z=\beta-1+n}^{(\beta-n)}. \quad (3)$$

Это происходит благодаря наличию квантово-групповой симметрии $U_q(sl(2))$. Мы говорим “спектр содержит в себе”, потому что в секторе $S^z = \beta - 1 + n$ меньше векторов, чем в секторе с $S^z = \beta - 1$.

Модель XXZ связана с двумерной классической статистической решеточной шестивершинной моделью (моделью льда). Физические системы, для описания которых пригодна эта модель: кристалл льда H_2O , сегнетоэлектрик PO_4H_2K , антисегнетоэлектрик $PO_4H_2NH_4$. Это двумерная идеализация кристалла, пары атомов которого или соседние радикалы связаны “водородной связью”. В окрестности каждого узла имеется не более двух ионов H^+ . В кристалле льда каждый атом кислорода имеет 4 связи с соседними атомами кислорода, расположенных в вершинах тетраэдра, что дает 6 конфигураций по отношению к решетке (Онсагер, Дюпьи, 1960). Гамильтониан модели XXZ связан с трансфер матрицей шестивершинной модели $\hat{t}_{1/2}(u)$ следующим равенством:

$$H_{XXZ} = -\frac{N}{2} \cos(\eta) + \sin(\eta) \frac{d}{du} \log \hat{t}_{1/2}(u)|_{u=0}. \quad (4)$$

Гамильтониан и трансфер матрица коммутируют между собой, следовательно, имеют одну и ту же систему собственных векторов. В данной работе мы в первую очередь найдем собственные значения трансфер матрицы, а затем спектр энергии по формуле (4).

Существует бесконечное семейство трансфер матриц $t_j(u)$, где $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Они коммутируют между собой. А также удовлетворяют бесконечной системе рекуррентных функциональных соотношений слияния [3–5]:

¹⁾e-mail: belavin@itp.ac.ru; gubanov@itp.ac.ru

$$\begin{aligned} & \hat{t}_{1/2}(u - (j + 1/2)\eta)\hat{t}_j(u) = \\ & = t_0(u - (j + 1)\eta)\hat{t}_{j-1/2}(u + \eta/2) + \\ & + t_0(u - j\eta)\hat{t}_{j+1/2}(u - \eta/2), \end{aligned} \quad (5)$$

где $t_0(u) = \sin^N(u + \eta/2)$. В данной работе мы доказываем, что при параметре анизотропии, равном корню из единицы $q^{p+1} = -1$, трансфер матрица со спином $j = p/2$ имеет нулевые собственные значения на собственных бетевских векторах, если на параметр твиста β и сектор $S^z = s$ наложены определенные условия. Обращение собственного значения $t_{p/2}(u)$ в нуль приводит к тому, что бесконечная система функциональных соотношений слияния (5) обрывается и превращается в *функциональное уравнение* на $t_{1/2}(u)$. Решив это функциональное уравнение, мы найдем $t_{1/2}(u)$ и значение энергии по формуле (4). Обозначим символом V_p всю совокупность бетевских собственных векторов, на которых $t_{p/2}(u)$ имеет нулевые собственные значения. Ограничение модели XXZ на пространство V_p мы называем *редукцией модели XXZ* . Как было показано в [2], термодинамический предел таким образом редуцированной модели XXZ совпадает с минимальной моделью конформной теории поля с центральным зарядом $c = 1 - 6/p(p + 1)$, что делает особенно интересным данное рассмотрение. Спектр энергии редуцированной модели XXZ можно вычислить, решив функциональные уравнения на трансфер матрицу шести-вершинной модели.

Нулевые собственные значения. Рассмотрим $T - Q$ -уравнение Бакстера ($t(u) \equiv t_{1/2}(u)$)

$$\begin{aligned} t(u)Q(u) &= q^{-\beta}t_0(u + \eta/2)Q(u - \eta) + \\ &+ q^\beta t_0(u - \eta/2)Q(u + \eta), \end{aligned} \quad (6)$$

где $t_0(u) = \sin^N(u + \eta/2)$. Согласно работе [6], это уравнение полезно рассматривать как дискретную версию дифференциального уравнения второго порядка [7]. В таком случае, кроме функции $Q(u)$, у него должно быть второе линейно независимое решение $P(u)$ с тем же самым собственным значением трансфер матрицы $t(u)$. Можно выразить собственные значения трансфер матрицы через собственные значения оператора Бакстера $Q(u)$ и оператора $P(u)$:

$$\begin{aligned} & t_j(u) = q^{(2j-1)\beta} f(u - (j - 1/2)\eta) \times \\ & \times [Q(u - (j + 1/2)\eta)P(u + (j + 1/2)\eta) - \\ & - Q(u + (j + 1/2)\eta)P(u - (j + 1/2)\eta)], \end{aligned} \quad (7)$$

где функция $f(u)$ является квазипериодической функцией:

$$f(u + \eta) = q^{-2\beta} f(u) \quad (8)$$

и введена ради удобства (можно было ввести $\tilde{P}(u) = f(u)P(u)$).

Рассмотрим случай, когда параметр анизотропии равен корню из единицы, $q^{p+1} = -1$, где p – некоторое натуральное число. Для трансфер матрицы в представлении со спином $j = p/2$ имеем

$$\begin{aligned} & t_{p/2}(u + \pi/2) = \\ & = (-1)^\beta f(u)[P(u + \pi)Q(u) - P(u)Q(u + \pi)], \end{aligned} \quad (9)$$

откуда немедленно следует, что в том случае, когда функции $Q(u)$ и $P(u)$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{P(u + \pi)}{P(u)} = \frac{Q(u + \pi)}{Q(u)}, \quad (10)$$

собственное значение трансфер матрицы $t_{p/2}(u)$ обращается в нуль.

Мы можем выразить функцию $P(u)$ через $Q(u)$. А именно, если мы выполним разложение

$$\begin{aligned} & \frac{t_0(u)}{Q(u + \eta/2)Q(u - \eta/2)} = \\ & = R(u) + q^\beta \frac{A(u + \eta/2)}{Q(u + \eta/2)} - q^{-\beta} \frac{A(u - \eta/2)}{Q(u - \eta/2)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $R(u)$ есть тригонометрический полином степени $N - 2n$, однозначно определяемый по известным тригонометрическим полиномам $t_0(u)$ и $Q(u)$; $A(u)$ соответственно имеет степень меньше n . (Целое число n связано с собственным значением $S^z = s$ в рассматриваемом секторе $n = N/2 - s$.) Затем выполним еще одно разложение:

$$R(u) = q^\beta F(u + \eta/2) - q^{-\beta} F(u - \eta/2); \quad (12)$$

тогда, как нетрудно проверить, функция $P(u)$ будет определяться выражением

$$P(u) = \frac{1}{f(u)}(Q(u)F(u) + A(u)). \quad (13)$$

Анализ этого выражения приводит к ограничению на значение параметра твиста β в граничных условиях модели XXZ :

$$(-1)^{2\beta} = (-1)^N. \quad (14)$$

Если длина спиновой цепочки атомов *четная*, то число β должно быть *целым*, если длина *нечетная*, то

полуцелым. При других значениях β исследуемого нами обрыва функциональных соотношений не произойдет. Условием существования разложения (12) функции $R(u)$ на $F(u)$, при котором функция $F(u)$ при сдвиге аргумента $u \rightarrow u + \pi$ будет вести себя точно так же, как и $R(u)$, является неравенство

$$\prod_{m=-s}^{+s} \sin\left(\pi \frac{m + \beta}{p + 1}\right) \neq 0 \quad (15)$$

(поскольку это произведение появляется в знаменателе $F(u)$). Переменная m пробегает либо целые, либо полуцелые числа от $-s$ до $+s$. В зависимости от четности длины цепочки числа β и s одновременно целые или полуцелые, поэтому их сумма или разность – целое число. Условие (15) будет выполнено, если

$$|s| < \min(\beta, p + 1 - \beta) \pmod{p + 1}. \quad (16)$$

Таким образом, анализируя второе линейно независимое решение уравнение Бакстера, мы приходим к следующему выводу: *при параметре анизотропии, равном корню из единицы $q^{p+1} = -1$, трансфер матрица со спином $j = p/2$ в секторе $S^z = s$ имеет нулевые собственные значения, если выполнены условия (14) и (16).*

Алгебраическая структура. В предыдущем разделе мы доказали факт существования векторов, при ограничении на которые функциональные соотношения (5) обрываются и превращаются в замкнутую систему уравнений на собственные значения трансфер матрицы $t_{1/2}(u)$. В этом разделе мы перечислим все векторы из пространства состояний модели, которые удовлетворяют данному условию.

Во Введении мы сказали, что связь (3) между энергиями цепочек с разными параметрами твиста β осуществляется благодаря наличию квантово-групповой симметрии $U_q(sl(2))$. Генераторами этой симметрии являются операторы S^z , X и X^t , где

$$X = \sum_{n=1}^N q^{\frac{1}{2}(\sigma_1^z + \dots + \sigma_{n-1}^z)} \sigma_n^+ q^{-\frac{1}{2}(\sigma_{n+1}^z + \dots + \sigma_N^z)} \quad (17)$$

(при $q^{p+1} = -1$, как нетрудно проверить, $X^{p+1} = 0$). Оператор X , действуя на вектор из сектора $S^z = s$, переводит его в вектор из сектора $S^z = s + 1$: $[S^z, X] = X$. Действуя на гамильтониан, получаем

$$X H_{XXZ}^{(\beta)} - H_{XXZ}^{(\beta-1)} X = (\dots)(1 - q^{2(S^z - \beta + 1)}), \quad (18)$$

что доказывает соотношение (3).

Трансфер матрица шестивершинной модели, связанная с рассматриваемым гамильтонианом модели XXZ , выражается через диагональные элементы матрицы монодромии $L_k^n(u)$:

$$t_j(u) = \sum_{n=1}^{2j+1} q^{-2\beta(j+1-n)} L_n^n(u). \quad (19)$$

Используя уравнение Янга – Бакстера, точно так же, как это было сделано в работе [8], можно получить перестановочные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии и операторами S^z и X :

$$\begin{aligned} q^{S^z} L_k^n &= q^{n-k} L_k^n q^{S^z}, \\ X L_k^n(u) &= q^{2(j+1)-n-k} L_k^n(u) X + \\ &+ \omega_{k-1} e^{+iu} q^{j+1-n} L_{k-1}^n(u) q^{-S^z} - \\ &- \omega_n e^{+iu} q^{j+2-k} L_k^{n+1}(u) q^{+S^z}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\omega_n = \sqrt{[n]_q [2j+1-n]_q}$ и использовано стандартное обозначение $[x]_q = (q^x - q^{-x}) / (q - q^{-1})$. Перестановочные соотношения (20) позволяют выразить саму трансфер матрицу через оператор X . Приведем без доказательства выведенную нами нетривиальную формулу для трансфер матрицы со спином $j = p/2$ в секторе $S^z = s$:

$$t_{p/2}(u) = \sum_{r,k=0}^p X^r \hat{M}_{rk} X^k. \quad (21)$$

В этой формуле оператор \hat{M}_{rk} есть

$$\begin{aligned} \hat{M}_{rk} &= (-1)^r \omega^{-1} e^{-ipu} q^{-2s - (2\beta + 1 - r - k)p/2 - 2k} \times \\ &\times \sum_{n=0}^p q^{(2(\beta-s) + r - k)n} C_r^n C_k^{p-n} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{p-r-k} \lambda_{m,p-r-k} (L_{p/2})(u)_{p-r-k-m}^1 X^{p-r-k-m}. \end{aligned} \quad (22)$$

Введены обозначения: $\omega = \prod_{k=1}^{2j} \omega_k$, числа C_n^N есть q -биномиальные коэффициенты:

$$C_n^N = \frac{1}{[n]_q!} [N]_q [N-1]_q \dots [N+1-n]_q = \frac{[N]_q!}{[n]_q! [N-n]_q!},$$

величины $\lambda_{m,p-r-k}$ определяются по формуле

$$\begin{aligned} \lambda_{m,m'} &= \\ &= e^{imu} q^{p/2+1+s+(m'-m)(m'+s-3p/2-1)} C_m^{m'} \prod_{l=1}^m \omega_{m'-l}. \end{aligned}$$

Как видно из (21) трансфер матрица $t_{p/2}(u)$ выражается через сумму мономов вида $X^r \hat{M}_{rk} X^k$. Рассмотрим, при каких целых числах r и k оператор \hat{M}_{rk} отличен от нуля в случае $q^{p+1} = -1$. Оператор \hat{M}_{rk} пропорционален следующей сумме q -биномиальных коэффициентов:

$$f_{rk} \equiv \sum_{n=0}^p C_r^n C_k^{p-n} q^{n(2l+r-k)}, \quad (23)$$

где $l = \beta - s$. К сожалению, нам не удалось получить выражение для коэффициентов f_{rk} в замкнутом виде. Поэтому мы проанализировали сумму (23) численным способом. Гипотеза, которую мы проверили численно, состоит в том, что при $q^{p+1} = -1$ коэффициенты f_{rk} отличны от нуля только в следующей замкнутой области: $r + k \leq p$ и либо $r > p - l$, либо $k > l - 1$. Следовательно, трансфер матрица $t_{p/2}(u)$ представима в виде

$$t_{p/2}(u) = X^{p+1-l}(\dots) + (\dots)X^l, \quad (24)$$

а значит, обращается в нуль на когомологиях

$$V_{p,l} = \text{Ker } X^l / \text{Im } X^{p+1-l}. \quad (25)$$

То есть нулевые собственные значения на таких собственных векторах v из сектора $S^z = s$, которые: во-первых, уничтожаются оператором X^l :

$$X^l v = 0, \quad (26)$$

во-вторых, сами не могут быть представлены в виде $X^{p+1-l}\chi$, где χ – какой-либо другой вектор:

$$v \neq X^{p+1-(\beta-s)}\chi. \quad (27)$$

Таким образом, мы перечислили все векторы, на которых трансфер матрица $t_{p/2}(u)$ имеет нулевые собственные значения, и на которых, следовательно, как было сказано выше, рекуррентная система (5) превращается в замкнутую систему уравнений на собственные значения трансфер матрицы $t_{1/2}(u)$.

Вычисление собственных значений. Найдем собственные значения трансфер матрицы и гамильтониана в случае $q^4 = -1$. Имеем

$$t_{3/2}(u) = 0, \quad (28)$$

$$t_{1-j}(u) = -(-1)^{\frac{N}{2}+\beta-s} t_j(u + \pi/2).$$

Для упрощения вычислений введем функцию $S_N(u) \equiv (-2)^{N/2} t_{1/2}(u - \eta/2)$. Функциональные соотношения принимают вид

$$\begin{aligned} S_N(u + \frac{\pi}{8}) S_N(u - \frac{\pi}{8}) &= \\ &= \cos^N(2u) - (-1)^{-\frac{N}{2}+l} \sin^N(2u). \end{aligned} \quad (29)$$

В это уравнение входят числа N и $l = \beta - s$, в зависимости от того, четные они или, нечетные, мы получаем четыре различных уравнения. Соответственно, находим четыре различных решения:

$$\begin{aligned} S_{4M}^{\{n\}}(u) &= \\ &= \prod_{m=1}^M (1 + (-1)^{n_m} \cos(\pi \frac{2m-1}{4M}) \cos(4u)), \\ S_{4M+2}^{\{n\}}(u) &= \sin(2u) \sqrt{2} \prod_{m=1}^M (1 + (-1)^{n_m} \times \\ &\times \cos(\pi \frac{2m}{4M+2}) \cos(4u)), \end{aligned} \quad (30)$$

$$S_{4M-1}^{\{n\}}(u) = e^{-iu} (-i)^{M-1/2} \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{2M-1} (e^{(-1)^{n_m} \frac{i\pi m}{4M-1}} \sin(2u + \frac{\pi}{4}) -$$

$$-i e^{(-1)^{n_m} \frac{i\pi m}{4M-1}} \sin(2u - \frac{\pi}{4})),$$

$$S_{4M+1}^{\{n\}}(u) = e^{-iu} (-i)^M \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{2M} (e^{(-1)^{n_m} \frac{i\pi m}{4M+1}} \sin(2u + \frac{\pi}{4}) -$$

$$-i e^{(-1)^{n_m} \frac{i\pi m}{4M+1}} \sin(2u - \frac{\pi}{4})),$$

где множество $\{n_m\}$ есть любой набор чисел, равных 0 или 1, например, $\{0, 1, 0, \dots, 0, 1\}$. Мы интерпретируем эти числа как фермионные числа заполнения. Написанные функции удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} S_{4M+\delta}(u + \frac{\pi}{8}) S_{4M+\delta}(u - \frac{\pi}{8}) &= \\ &= \cos^{4M+\delta}(2u) + i^{-\delta} \sin^{4M+\delta}(2u). \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, мы нашли решения только для случая, когда $\beta - s$ есть нечетное число. Для собственных значений энергии получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{E_{4M}^{(n)}}{4J} &= -\frac{4M}{2\sqrt{2}} - \\
 &- \frac{4}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^M (-1)^{n_m} \cos\left(\pi \frac{2m-1}{4M}\right), \\
 \frac{E_{4M+2}^{(n)}}{4J} &= -\frac{4M+1}{2\sqrt{2}} + \\
 &+ \frac{2}{\sqrt{2}} \left(1 - 2 \sum_{m=1}^M (-1)^{n_m} \cos\left(\pi \frac{m}{2M+1}\right)\right), \\
 \frac{E_{4M-1}^{(n)}}{4J} &= -\frac{4M-1}{2\sqrt{2}} - \\
 &- \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i + 2i \sum_{m=1}^{2M-1} \exp\left(\frac{-2i(-1)^{n_m} \pi m}{4M-1}\right)\right), \\
 \frac{E_{4M+1}^{(n)}}{4J} &= -\frac{4M+1}{2\sqrt{2}} - \\
 &- \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i + 2i \sum_{m=1}^{2M} \exp\left(\frac{-2i(-1)^{n_m} \pi m}{4M+1}\right)\right).
 \end{aligned} \tag{32}$$

Хотя мнимая единица явным образом входит в последние две формулы, энергия E вещественна в лю-

бом случае – мнимые части взаимно сокращаются после вычисления суммы. Для четных длин спиновых цепочек $N = 4M$ и $N = 4M + 2$ мы нашли по 2^M уровней энергии. Для нечетных длин спиновых цепочек $N = 4M - 1$ и $N = 4M + 1$ мы нашли, соответственно, по 2^{2M-1} и 2^{2M} собственных значений.

Авторы благодарят М. Ю. Лашкевича за полезные замечания и плодотворные обсуждения.

1. М. Годен, *Волновая функция Бете*, Новокузнецкий физико-математический институт, 2000, пер. с французского П. П. Кулиша и Е. К. Складина, под ред. Л. Д. Фаддеева.
2. V. Pasquier and H. Saleur, Nucl. Phys. **B330**, 523 (1990).
3. Yu-kui Zhou, hep-th/9502053 (1995).
4. A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, J. Phys. **A20**, 1565 (1987).
5. C. M. Yung and M. T. Batchelor, Nucl. Phys. **B446**, 461 (1995).
6. A. Belavin and Yu. Stroganov, hep-th/9908050; Phys. Lett. **B446**, 281 (1999).
7. V. Bazhanov, S. Lukyanov, and A. Zamolodchikov, Commun. Math. Phys. **177**, 381 (1996); **190**, 247 (1997); **200**, 297 (1999).
8. A. A. Belavin, S. Yu. Gubanov, and B. L. Feigin, hep-th/0008011.