Письма в ЖЭТФ, том 42, вып. 8, стр. 340 – 342 *25 октября 1985 г.*

О МНОГОПЕТЛЕВОМ ВКЛАДЕ В ТЕОРИЮ СТРУНЫ

М.А.Баранов, А.С.Шварц

Вычислен вклад в струнные амплитуды от поверхностей произвольной топологии, что отвечает учету многопетлевых диаграмм в теории струны.

В последнее время теория струны вызывает все больший интерес. Сейчас считается правдоподобным, что теория фермионной струны в десятимерном пространстве (точнее, теория суперструны Грина – Шварца, которая, по-видимому, эквивалентна теории фермионной струны), является фундаментальной теорией, описывающей в низкоэнергетическом пределе все существующие взаимодействия. В настоящей статье мы будем рассматривать вклад в струнные амплитуды от поверхностей произвольной топологии. (Это отвечает учету многопетлевых диаграмм). Мы будем пользоваться предложенным Поляковым [1] формализмом теории струны, в котором, как он позже заметил, вычисление g-петлевого вклада сводится к вычислению интегралов по некоторому конечномерному суперпространству (суперконформному пространству модулей V_f). Однако, это пространство до сих пор не было описано и мера интегрирования на нем не была построена.

Нашей основной целью будет изучение меры интегрирования, возникающей на этом пространстве, а также меры, на его бозонном аналоге (конформном пространстве модулей V_b), возникающей при анализе бозонной струны в критической размерности ($d = 26$). Можно надеяться, что наши результаты будут полезны при анализе конечности струнных амплитуд, поскольку объем пространства модулей, вычисленный по естественной метрике в этом пространстве, оказывается конечным.

Будем понимать под суперконформным многообразием супермногообразие, склеенное из супер областей комплексной размерности (1,1) с помощью суперконформных преобразований – преобразований вида $z \to u(z - \epsilon(z)\theta)$, $\theta \to \sqrt{u'(z)}(\theta + \epsilon(z) + {}^1/_2\epsilon(z)\epsilon'(z)\theta)$, где $u(z)$ и $\epsilon(z)$ – четная и нечетная аналитические функции четной комплексной координаты z, θ – нечетная комплексная координата. Подстилающее многообразие M суперконформного многообразия будем предполагать компактной поверхностью рода $g > 1$. (Это означает, что мы ограничиваемся анализом многопетлевых вкладов в теории замкнутой струны). Суперконформное пространство модулей V_f определяется как множество классов суперконформных многообразий относительно суперконформной эквивалентности. Оказывается, что всякое суперконформное многообразие рода $g > 1$ эквивалентно суперконформному многообразию, получающемуся с помощью факторизации из супераналога полуплоскости из суперобласти $\mathcal{H}$ с координатами $Z = (z, \theta)$, где z – четная комплексная координата, подчиненная условию $\operatorname{Im} z > 0$, θ – нечетная комплексная координата. Точнее, это многообразие получается из $\mathcal{H}$ факторизацией по дискретной подгруппе Γ группы $\mathcal{A}$ действительных суперпроективных преобразований – суперконформных преобразований γ, для которых $u(z) = (az + b)(cz + d)^{-1}$, $\epsilon(z) = \epsilon_1 + \epsilon_2 z$, $a, b, c, d, \epsilon_1, \epsilon_2$ – действительны и $ad - bc = 1$. Преобразования группы Γ должны удовлетворять условию $|a + d| > 2$. Группа Γ изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(M)$, поэтому у нее можно выбрать систему образующих $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$, удовлетворяющих соотношению $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$. Обратно, задание системы элементов $a_1, \ldots, b_g$ определяет группу Γ и, следовательно, суперконформное многообразие $\mathcal{H}/\Gamma$. Отсюда можно вывести, что размерность пространства V_f равна $(6g - 6, 4g - 4)$. (Следует учесть, что две сопряженных подгруппы Γ и Γ' группы $\mathcal{A}$ отвечают эквивалентным суперконформным многообразиям [2]). Полем типа k на $\mathcal{M} = \mathcal{H}/\Gamma$ называется функция $F(Z, \overline{Z})$ на $\mathcal{H}$, удовлетворяющая условию $F(\gamma Z, \gamma \overline{Z}) = \left[\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon_1\epsilon_2\right)(cz + d) + \theta(\epsilon_2 d - \epsilon_1 c)\right]^{-k} (cz + d)^{2k} \cdot F(Z, \overline{Z})$ для $\gamma \in \Gamma$. В множестве полей типа k вводится скалярное произведение по формуле $(F, G) = \int \overline{F} G Y^{-k} dV$, где $Y = \operatorname{Im}(z - {}^1/_2 \theta\overline{\theta})$, $dV = Y^{-1} dz\, d\overline{z}\, d\theta\, d\overline{\theta}$, интеграл берется по фундаментальной области, которую мы будем считать имеющей единичный объем. Касательное пространство к V_f в точке, определяемой супермногообразием $\mathcal{M}$, можно отождествить с пространством нечетных аналитических полей типа 3 на $\mathcal{M}$. Скалярное произведение этих полей порождает метрику на V_f; соответствующий элемент объема обозначим dv_f. В пространстве четных полей типа k определим оператор $\Box_k$ формулой $\Box_k = 2iYD\overline{D} - k(\theta - \overline{\theta})\overline{D}$, где $D = \frac{\partial}{\partial\theta} + \theta\frac{\partial}{\partial z}$. Можно доказать, что мера, возникающая на V_f при вычислении струнных амплитуд дается формулой

$$d\mu_f = |\det \Box_0|^{-5} |\det \Box_2| dv_f, \tag{1}$$

где символ det означает регуляризованный детерминант без учета нулевых мод.

Аналоги приведенных выше результатов для бозонного случая хорошо известны. В них роль группы Γ играет подгруппа группы проективных преобразований верхней полуплоскости H. Мера $d\mu_b$ на V_b, возникающая при вычислении струнных амплитуд, имеет вид

$$d\mu_b = (\det \Delta_0)^{-13} (\det \Delta_2)\, dv_b, \tag{2}$$

где dv_b – элемент объема, отвечающей так называемой метрике Вейля – Петерсона на V_b, Δ_k – оператор Лапласа на полях веса k (формула (2) может быть получена из результатов [3]). Можно доказать, что выражение (2) преобразуется к виду

$$d\mu_b = \text{const}\, Z'(1)^{-13} Z(2)\, dv_b, \tag{3}$$

где $Z(s)$ – дзета-функция Сельберга, отвечающая группе Γ. Эта функция определяется формулой [4]:

$$Z(s) = \prod_{[\gamma]} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \exp(-l_\gamma(s + k - 1)), \tag{4}$$

где $\operatorname{tr}\gamma = |a + d| = 2\operatorname{ch} l_\gamma/2$, $[\gamma]$ пробегает все примитивные классы сопряженных элементов. Элемент $\gamma \in \Gamma$ называется примитивным, если он не может быть представлен в виде

$\gamma = \beta^k$, где $\beta \in \Gamma$, $k \neq 1$. (Классы сопряженности примитивных элементов находятся во взаимно однозначном соответствии с простыми замкнутыми геодезическими на H/Γ, числа l_γ равны длинам этих геодезических). Для того, чтобы получить (4) необходимо использовать формулу следа Сельберга для форм веса k [4] и рассуждения, примененные в [5] для вычисления аналитического кручения в двумерном случае. Выражение для элемента объема $d\nu_b$ может быть получено из результатов [6]. В координатах длина-твист на пространстве Тейхмюллера (односвязном накрывающем пространства V_b) $d\nu_b = dl_1 \ldots dl_{3g-3} d\tau_1 \ldots d\tau_{3g-3}$.

Чтобы описать координаты длина-твист заметим, что поверхность постоянной отрицательной кривизны, имеющую род g, можно разрезать по $3g-3$ замкнутым геодезическим на $2g-2$ поверхности с краем, каждая из которых топологически эквивалентна кругу с двумя дырками. Длины этих геодезических объясняются координатами l_k, $k = 1, \ldots, 3g-3$. Если фиксирована какая-то поверхность с координатами $l_1, \ldots, l_{3g-3}$, то остальные поверхности можно получить, разрезав по каждой из $3g-3$ геодезических, сделав поворот на расстояние τ_k по геодезической с длиной l_k и снова склеив. Расстояния $\tau_1, \ldots, \tau_{3g-3}$ $(-\infty < \tau_k < \infty)$ вместе с длинами $l_1, \ldots, l_{3g-3}$ образуют нужную нам систему координат.

После направления в печать данной статьи авторы совместно с Ю.И.Маниным и И.В.Фроловым получили супервариант формулы следа Сельберга. С помощью полученной формулы можно преобразовать (1) к виду

$$d\mu_f = \mathrm{const} \cdot Z(2)\, Z(3/2)^{-1} \left[Z'(1)\right]^{-5} Z(1/2)^{10} Z(0)^{-5} Z(-{}^1/_2)^{-1} Z'(-1) d\nu_f,$$

где $Z(s)$ строится по формуле (4), в которой l_γ определяется соотношением

$$2\operatorname{ch} l_\gamma/2 = |a + d| \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon_1\epsilon_2\right) - 2\epsilon_1\epsilon_2.$$

Пользуемся случаем выразить глубокую благодарность А.М.Полякову за ценную информацию и И.В.Фролову за исправление неточности в формуле (3).

Литература

1. *Polyakov A.M.* Phys. Lett., 1981, **103B**, 207. 211.
2. *Earle C., Eells J.* J. Diff Geom., 1961, 3, 19.
3. *Alvarez O.* Nucl. Phys., 1983, **B216**, 125.
4. *Hejhal D.A.* Springer Lecture Notes, 1976, **548**, 1.
5. *Ray D.B., Singer I.M.* Ann. of Math., 1973, 154.
6. *Wolpert S.A.* Bull. AMS, 1984, **11**, 189; Ann. of Math., 1983, **117**, 207.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
10 июля 1985 г.