Письма в ЖЭТФ, том 74, вып. 7, с. 402 – 406

Численное моделирование коллапса в идеальной несжимаемой гидродинамике

В. А. Желиговский, Е. А. Кузнецов+, О. М. Подвигина

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, 113556 Москва, Россия

+Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 117334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 августа 2001 г.

Численно продемонстрировано появление особенности завихренности $\boldsymbol{\omega}$ поля скорости в отдельной точке, не связанной с симметрией начального распределения. Показано, что поведение максимальной величины завихренности $|\boldsymbol{\omega}|$ вблизи точки коллапса хорошо аппроксимируется зависимостью $(t_0-t)^{-1}$, где t_0 – время коллапса, что согласуется с интерпретацией коллапса как процесса опрокидывания вихревых линий.

PACS: 47.15.Ki, 47.32.Cc

1. Проблема коллапса в гидродинамике как процесса образования особенности за конечное время является ключевой для понимания физической природы развитой турбулентности. Несмотря на определенный прогресс в построении статистической теории колмогоровских спектров с помощью диаграммного или функционального подходов (см. [1] и ссылки там), вопрос о том, является ли колмогоровский спектр [2] решением статистических уравнений, до сих пор до конца не решен. Нерешенной является и другая важная проблема – проблема перемежаемости, в статистическом смысле понимаемая как существование сильно негауссового распределения турбулентной скорости, приводящего к отклонению индексов старших корреляционных функций от колмогоровского значения [3]. Негауссовость приводит к существованию ненулевых нечетных корреляционных функций, что свидетельствует о наличии сильных корреляций, указывающих на существование когерентных структур в турбулентности. Численные и экспериментальные данные показывают (см. [3], а также ссылки там), что в режиме развитой турбулентности завихренность распределена сильно неравномерно в пространстве, концентрируясь в достаточно малых областях. Какова причина возникновения высокой концентрации завихренности? Можно ли ее объяснить коллапсом – возникновением особенностей завихренности? Если да, то каким образом, исходя отсюда, можно получить колмогоровский спектр? Последний вопрос не является риторическим: хорошо известно, что всякая сингулярность влечет наличие степенных хвостов в спектре. Таким образом, вопрос о коллапсе в гидродинамике имеет принципиальное значение.

В изучении коллапса в гидродинамике наиболее популярным объектом является система из двух антипараллельных вихревых трубок с непрерывно распределенной завихренностью [4], или в более общей постановке – течения с высокой симметрией [5]. Как известно, два антипараллельных вихревых филамента подвержены так называемой неустойчивости Кроу, ведущей к вытягиванию вихревых нитей в нормальном направлении к плоскости начального распределения вихрей и сокращению их взаимного расстояния. Как свидетельствуют численные эксперименты [4], на нелинейной стадии развития этой неустойчивости в коре каждой вихревой трубки формируются точечные особенности завихренности с ростом $|\boldsymbol{\omega}|$ вблизи точки коллапса как $(t_0-t)^{-1}$, где t_0 – время образования особенности (см. также [6]).

2. В данной работе представлены результаты численного эксперимента, которые можно интерпретировать как появление особенности в поле $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ в отдельной точке для трехмерной идеальной гидродинамики с начальными данными, не имеющими определенной симметрии. Наш подход основан на представлении уравнения завихренности $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)$ в терминах вихревых линий, введенном в работе [7]:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)=(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})\cdot\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}(\mathbf{a},t)/J. \tag{1}$$

Здесь

$$\mathbf{r}=\mathbf{R}(\mathbf{a},t) \tag{2}$$

– отображение, осуществляющее переход в криволинейную систему координат, связанную с вихревыми линиями, так что $\mathbf{b}=(\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})\cdot\nabla_{\mathbf{a}})\mathbf{R}(\mathbf{a},t)$ – касательный вектор к вихревой линии, $J=\det\|\,\partial\mathbf{R}/\partial\mathbf{a}\,\|$ –

якобиан отображения (2). Динамика вектора $\mathbf{R}(\mathbf{a},t)$ определяется из уравнения

$$\partial_t \mathbf{R} = \hat{\Pi}\,\mathbf{v}(\mathbf{R},t), \tag{3}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ – скорость жидкости в точке $\mathbf{r}=\mathbf{R}$, а $\hat{\Pi}$ – поперечный проектор к данной вихревой линии в этой точке:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \xi_\alpha \xi_\beta, \quad \xi = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|\,.$$

Уравнения (1)–(3) замыкаются соотношениями

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t) = \operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r},t), \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{4}$$

Система уравнений (1)–(4) представляет собой результат частичного интегрирования бессилового уравнения Эйлера:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}], \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{5}$$

Векторное поле $\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a})$ ($\operatorname{div}_\mathbf{a}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{a}) = 0$), входящее в (1), является инвариантом Коши, характеризующим свойство вмороженности вихревых линий в жидкость; в частности,

$$\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{a}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},0) \quad \text{при} \quad \mathbf{R}(\mathbf{a},0) = \mathbf{a}. \tag{6}$$

Как отмечалось в [7, 8], якобиан J может принимать произвольные значения, поскольку данное описание является смешанным – лагранжево-эйлеровым. В частности, J может обращаться в нуль в некоторой точке, что согласно (1) означает возникновение особенности для завихренности. Возможность появления такого типа особенности была продемонстрирована в [8] для трехмерной интегрируемой гидродинамики, относящейся к тому же типу уравнений, что и уравнение Эйлера (5), отличаясь от него способом согласования (обобщенных) завихренности и скорости: $\mathbf{v} = \operatorname{rot}(\delta\mathcal{H}/\delta\boldsymbol{\omega})$, $\mathcal{H} = \int|\boldsymbol{\omega}|d\mathbf{r}$.

Появление особенности в завихренности при $J=0$ означает, что одна вихревая линия в некоторой точке (точке коллапса) коснулась другой. Этот процесс есть ни что иное, как опрокидывание вихревых линий. Он полностью характеризуется отображением (2) и аналогичен опрокидыванию газа пылинок (в пренебрежении давления).

3. Предположим теперь, что коллапс в гидродинамике Эйлера возникает за счет опрокидывания вихревых линий. Обозначим через $t = \tilde{t}(\mathbf{a}) > 0$ решение уравнения $J(\mathbf{a},t) = 0$ и пусть $t_0 = \min_\mathbf{a}\tilde{t}(\mathbf{a})$. Тогда в окрестности минимальной точки $t=t_0$ и $\mathbf{a}=\mathbf{a}_0$ якобиан J (в ситуации общего положения) будет иметь разложение (сравни с [8])

$$J = \alpha(t_0 - t) + \gamma_{ij}\Delta a_i \Delta a_j + \dots\,, \tag{7}$$

где $\alpha > 0$ и γ – положительно определенная матрица, $\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$. Разложение (7) предполагает аналитичность J, что до момента возникновения особенности естественно предположить. При этом числитель в (1) – вектор $\mathbf{b}$ – не должен обращаться в нуль, поскольку условие $J=0$ в ситуации общего положения означает, что три вектора $\partial\mathbf{R}/\partial a_i\,(i=1,2,3)$ лежат в одной плоскости, но ни один из них не равен нулю (что было бы уже вырождением). В то же время, равенство $J=0$ означает в невырожденной ситуации обращение в нуль одного из собственных значений матрицы Якоби (λ_1) при ненулевых значениях двух других собственных значений ($\lambda_{2,3}$). Поэтому ясно, что в этой задаче возникают три направления: одно мягкое, отвечающее λ_1, и два жестких, соответствующих $\lambda_{2,3}$. Как видно из (7), во вспомогательном $\mathbf{a}$-пространстве автомодельность $\Delta\mathbf{a} \sim \sqrt{\tau}$ (где $\tau = \alpha(t_0 - t)$) одинакова по всем направлениям. Однако, как показано в [8], в физическом пространстве (в нем поведение $\boldsymbol{\omega}$ вблизи точки опрокидывания для интегрируемой гидродинамики такое же, как и для уравнения Эйлера) вдоль мягкого направления возникает сжатие: $X_1 \sim \tau^{3/2}$, а вдоль двух других жестких направлений $X_\perp \sim \tau^{1/2}$. В результате вблизи особенности $\boldsymbol{\omega}$ концентрируется в сильно вытянутой области в виде блина:

$$\boldsymbol{\omega} = \tau^{-1}\mathbf{g}(\zeta_1,\zeta_\perp), \quad \zeta_1 = X_1\tau^{-3/2}, \quad \zeta_\perp = X_\perp\tau^{-1/2}. \tag{8}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ при этом лежит в плоскости блина.

Приведенный здесь анализ по сути дела основан на поведении отображения вблизи складки и в этом смысле укладывается полностью в теорию катастроф [9]. При этом использование представления вихревых линий (1) дает возможность описать поведение *несжимаемого* векторного поля $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)$ вблизи сингулярной точки.

4. По существующей классификации коллапсов [10] опрокидывание вихревых линий следует отнести не к слабым, а к сверхслабым коллапсам, поскольку уже вклад от особенности в энстрофию $I = \int|\boldsymbol{\omega}|^2 d\mathbf{r}$, характеризующий темп диссипации за счет вязкости, мал, $\sim \tau^{1/2}$. При этом вклад в энергию оказывается пропорциональным $\tau^{3/2}$. Однако интеграл $\int(\nabla\boldsymbol{\omega})^2 d\mathbf{r}$ при $t \to t_0$ уже расходится. Таким образом, при опрокидывании решение $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ при $t \geq t_0$ не продолжимо в пространстве Соболева $H^2(\mathcal{R}^3)$ с нормой $\left(\sum_{q\leq 2}\int(\nabla^q f)^2 d\mathbf{r}\right)^{1/2}$. Согласно теореме, доказанной в [11], этого достаточно, чтобы расходился интеграл $\int_0^{t_0}\sup_\mathbf{r}|\boldsymbol{\omega}|dt = \infty$. Этот критерий, являясь необходимым и достаточным для коллапса, выполняется для (8). Другое ограничение следует из теоремы [12] относительно направления завихренности, согласно которой коллапс отсутствует для всех $t \in [0, t_0]$, если

$$\int\limits_0^{t_0} \sup |\nabla \xi|^2 dt < \infty, \tag{9}$$

где супремум берется на некоторой области A вблизи максимального значения $\boldsymbol{\omega}$. Существование коллапса означает расходимость интеграла (9) при $\tau \to 0$. Соответственно, величина $\sup |\nabla \xi|$ должна вести себя по крайней мере как $\tau^{-1/2}$. Очевидно, что, вследствие бездивергентности $\boldsymbol{\omega}$, в направлении вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$ в плоскости блина производная $\partial \xi / \partial X_{\omega}$ либо вообще не должна иметь особенности на длинах порядка и больше $\tau^{1/2}$, либо иметь более слабую особенность, чем $\tau^{-1/2}$. Однако это не исключает наличия больших градиентов вектора ξ при выходе из области блина в мягком направлении, например, с поведением $\sup\ |\partial \xi / \partial X_1| \sim \tau^{-\alpha}$ с $1/2 \le \alpha < 3/2$. Такое поведение представлялось бы естественным, поскольку при переходе из **a**-пространства в физическое пространство в мягком направлении происходит существенное сжатие области вблизи точки опрокидывания. Отсюда можно сделать вывод, что при опрокидывании должно существовать по крайней мере три масштаба: $l_1 \sim \tau^{3/2}, l_{\perp} \sim \tau^{1/2}$, и $l_{in} \sim \tau^{\alpha}$ с $1/2 < \alpha < 3/2$. Последний масштаб должен обеспечить выполнение теоремы [12].

5. Для проверки представленной выше гипотезы был проведен численный эксперимент на сетке 128^3 для системы уравнений (1)–(4). Отметим две особенности этой системы.

Во-первых, в отличие от уравнения Эйлера, обладающего бесконечным числом интегралов движения – инвариантов Коши, система (1)–(4) как частично проинтегрированное уравнение Эйлера явно содержит инварианты Коши. Поэтому при ее численном интегрировании не нужно заботиться об их сохранении, в то время как при численном интегрировании непосредственно уравнения Эйлера возникает вопрос, особенно для задачи коллапса, в какой степени эти инварианты сохраняются.

Во-вторых, в данной системе можно разделить интегрирование по времени (3) и интегрирование по пространственным переменным (4) – обращение оператора rot. Система (1)–(4) рассматривалась при периодических граничных условиях и обращение ротора выполнялось с помощью стандартной процедуры БПФ. Наибольшая сложность в численном интегрировании системы (1)–(4) связана с переходом (прямым и обратным) от переменных $\mathbf{R}$ к переменным $\mathbf{a}$. Мы обошли ее, используя две независимые сетки в пространстве переменных $\mathbf{R}$ – движущуюся согласно (3) и неподвижную регулярную (которую можно геометрически отождествить с сеткой переменных $\mathbf{a}$). Расчетный алгоритм состоит из следующих шагов: (i) интегрируя (3) по времени, получаем новые положения узлов движущейся сетки $\mathbf{R}$; (ii) вычисляем по (1), используя метод конечных разностей, значения $\boldsymbol{\omega}$ на движущейся сетке $\mathbf{R}$; (iii) линейной интерполяцией по ближайшим соседям определяем $\boldsymbol{\omega}$ на регулярной сетке $\mathbf{R}$ (для чего для данного узла указанной сетки предварительно находим содержащий его тетраэдр с вершинами, являющимися ближайшими узлами движущейся сетки $\mathbf{R}$); (iv) определяем скорость $\mathbf{v}$ из (4) на регулярной сетке $\mathbf{R}$; (v) линейной интерполяцией определяем скорость $\mathbf{v}$ на движущейся сетке $\mathbf{R}$ (для этого удобно элементарный куб регулярной сетки $\mathbf{R}$ рассматривать как объединение тетраэдров с вершинами в вершинах, центрах граней и в центре элементарного куба).

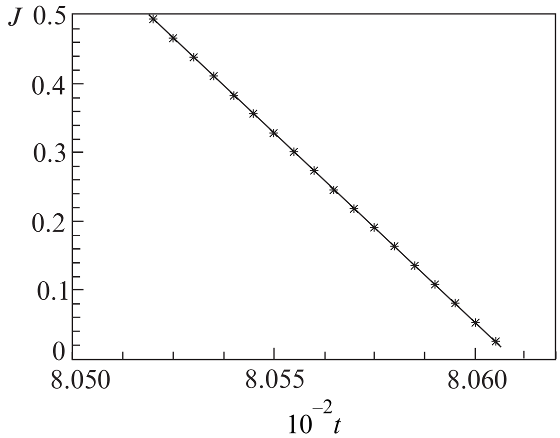

Рис.1. Зависимость минимума (по пространству) якобиана J от времени t при приближении к моменту коллапса

В качестве начального распределения завихренности было взято соленоидальное поле со случайными гармониками Фурье и экспоненциально затухающим спектром, обрезанным на волновом числе 8, причем $\boldsymbol{\omega}_0 \neq 0$ во всем кубе периодичности. Задаваемое таким образом поле завихренности изначально не обладало никакой симметрией. В процессе счета мы контролировали сохранение энергии: она была постоянна на всем интервале интегрирования с точностью до 1%. Для данных начальных условий мы наблюдали образование пика $|\boldsymbol{\omega}|$ в *отдельной* точке. В ней якобиан J был минимален (по пространству), а его значение как функции времени с высокой точностью уменьшалось по линейному закону (рис.1). За время расчета максимум $|\boldsymbol{\omega}|$ вырос почти в 20 раз, ширина пика $|\boldsymbol{\omega}|$ составила 3 длины интервала дискретизации сетки (сильная локализация $|\boldsymbol{\omega}|$ в точке коллапса видна на рис.2).

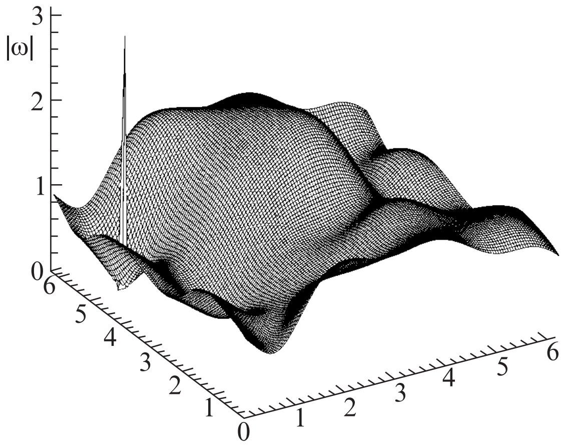

Рис.2. Величина $|\boldsymbol{\omega}|$ как функция координат R_1, R_3 на поверхности a_2 =const, проходящей через точку минимума J, при приближении к моменту коллапса ($t = 0.08055$)

Для проверки того, что данный процесс может рассматриваться как опрокидывание вихревых линий, мы вычисляли временную зависимость тензора вторых производных якобиана $\partial^2 J/\partial a_\alpha \partial a_\beta = 2\gamma_{\alpha\beta}$ в точке минимума J. Мы не обнаружили существенных изменений этой величины, когда минимум J как функция времени выходил на линейную асимптотику; это качественно согласуется с разложением (7). Итоговое смещение вихревых линий в окрестности точки коллапса иллюстрирует рис.3. В пространственном распределении $|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)|$ вблизи максимума имеется определенная анизотропия, однако утверждать, что возникают два *существенно* различных масштаба, мы не можем – не хватает пространственного разрешения.

Таким образом, полученные результаты могут быть интерпретированы как первое численное наблюдение опрокидывания вихревых линий. Наблюдаемый нами численно коллапс не был связан ни с какой симметрией начального распределения и возникал в отдельной точке.

6. Работа Е. А. К. была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант # 00-01-00929), Программой ведущих научных школ Российской федерации (грант # 00-15-96007) и INTAS (грант # 00-00292).

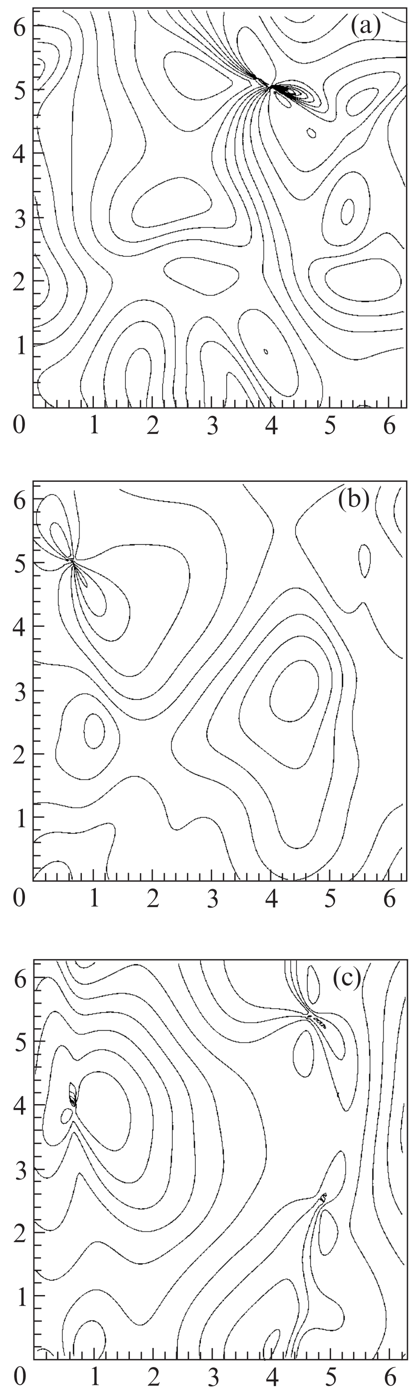

Рис.3. Изолинии функции $R_i(a_j, a_k)$, $i \neq j \neq k$, задающей поверхность, которая является образом отображения (2) плоскости a_i=const и проходит через точку минимума якобиана J. (a) $i = 1$; (b) $i = 2$; (c) $i = 3$. (Коллапс происходит в точке $\mathbf{R}(\mathbf{a}, t_0)$ с $\mathbf{a} = (7\pi/32;\ 41\pi/32;\ 13\pi/8)$)

1. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидромеханика*, 2-е изд., т.2, Санкт-Петербург, Гидрометео-

издат; V. S. L'vov, Phys. Rep. **257**, 1 (1991).
2. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР **30**, 9 (1941).
3. U. Frisch, *Turbulence. The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
4. R. M. Kerr, Phys. Fluids **A4**, 2845 (1993).
5. R. B. Pelz, Phys. Rev. **E55**, 1617 (1997); O. N. Boratav and R. B. Pelz, Phys. Fluids **6**, 2757 (1994).
6. R. Grauer, C. Marliani, and K. Germaschewski, Phys. Rev. Lett. **80**, 4177 (1998).
7. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **67**, 1015 (1998).
8. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, ЖЭТФ **118**, 853 (2000).
9. В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, М.: Знание, 1981.
10. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986).
11. J. T. Beals, T. Kato, and A. J. Majda, Comm. Math. Phys. **94**, 61 (1984).
12. P. Constantin, Ch. Feferman, and A. J. Majda, Commun. Partial Diff. Eqs. **21**, 559 (1996).