Письма в ЖЭТФ, том 82, вып. 10, с. 699 – 705 © 2005 г. 25 ноября

Еще раз о проблеме вильсоновского удвоения фермионных состояний

С. Н. Вергелес[1)]

*vspace*1mmИнститут теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 21 июля 2005 г.

После переработки 11 октября 2005 г.

В предыдущих работах автора были предъявлены два класса нерегулярных решеток, на одном из которых отсутствует вильсоновское удвоение фермионных состояний, а на другом оно формально имеет место. Под нерегулярными решетками здесь понимаются симплициальные комплексы, при помощи которых определяется дискретная квантовая теория гравитации. В этой работе показано, что в такой дискретной квантовой теории гравитации, независимо от класса решетки вильсоновское удвоение всегда отсутствует по той причине, что аномальные моды не распространяются.

PACS: 04.60, 98.80.H

1. Рассмотрим обобщение дираковского действия на пространственной решетке, обладающее следующими свойствами:

1) действие локально;

2) в наивном континуальном пределе действие переходит в действие дираковского поля;

3) действие является фазово-инвариантным, а также γ^5-инвариантным, то есть инвариантным относительно следующих преобразований: а) $\psi \to \exp(i\alpha)\psi$, $\overline{\psi} \to \overline{\psi}\exp(-i\alpha)$ и б) $\psi \to \exp(i\beta\gamma^5)\psi$, $\overline{\psi} \to \overline{\psi}\exp(i\beta\gamma^5)$.

Хорошо известно (см., например, [1 – 4]), что если решетка является гиперкубической, а точнее, периодической, то в описанной теории имеет место явление так называемого вильсоновского удвоения фермионных состояний. Это означает, что если на решетке имеется одно дираковское поле, то в континуальном пределе их оказывается два. Если же на решетке имеется одно вейлевское поле, то в континуальном пределе будут наблюдаться лишь дираковские поля. В работах [5] была доказана следующая теорема: если на периодической решетке фермионное действие имеет вид

$$I = \sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \overline{\psi}_{\mathbf{x}}\, \hat{H}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \psi_{\mathbf{y}}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ – радиус-векторы узлов решетки, и оно обладает перечисленными тремя свойствами, то вильсоновское удвоение также имеет место. Однако окончательного ответа на вопрос: на всякой ли решетке фермионное действие со свойствами 1)– 3) приводит к вильсоновскому удвоению? – до сих пор не было.

[1)]e-mail:vergeles@itp.ac.ru

2. В недавних работах автора [6, 7] была поколеблена всеобщая уверенность в том, что при всяком решеточном обобщении дираковской теории имеет место явление вильсоновского удвоения. Были предъявлены такие типы нерегулярных решеток (точнее, симплициальных комплексов), на которых отсутствует вильсоновское удвоение фермионных состояний. Эти комплексы по естественной причине названы нечетными. Были приведены также примеры комплексов, на которых вильсоновское удвоение формально имеет место. В предлагаемом письме утверждения работ [6, 7] существенно корректируются в сторону усиления: даже в том случае, когда решетка формально допускает вильсоновское удвоение фермионных состояний, фактически это явление отсутствует, так как аномальные фермионные моды (то есть моды, “размножающие” нормальные фермионные моды и дающие удвоение) не распространяются. В этом смысле вильсоновское удвоение отсутствует. Этот вывод справедлив именно в рамках дискретной квантовой гравитации, изложенной в [8, 9].

3. Вообще дираковская теория на симплициальных комплексах естественно возникает в теории дискретной гравитации, предложенной автором (см., например, [8, 9]). Поэтому здесь необходимо кратко описать дискретную квантовую теорию гравитации, тем более что это необходимо для изложения нового результата. Подробное изложение теории дискретной квантовой гравитации содержится в упомянутых работах.

Пусть $\mathfrak{K}$ обозначает симплициальный комплекс и a_i, a_j, … – его вершины. В случае четырехмерного комплекса используются четыре матрицы Дирака с евклидовой сигнатурой:

$$\gamma^a,\ a,b,c,\ldots = 1,2,3,4, \quad \mathrm{tr}\,\gamma^a\gamma^b = 2\delta^{ab},$$
$$\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4\,, \qquad \mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d = 4\,\varepsilon^{abcd}.$$

Каждому ориентированному 1-симплексу или ребру a_ia_j сопоставим элемент группы Spin(4):

$$\Omega_{ij} = \Omega_{ji}^{-1} = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{ij}^{ab}\sigma^{ab}\right)\ , \quad \sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a,\,\gamma^b],$$

а также элемент алгебры Клиффорда

$$\hat{e}_{ij} \equiv e_{ij}^a\gamma^a = -\Omega_{ij}\hat{e}_{ji}\Omega_{ij}^{-1},$$

где $\omega_{ij}^{ab} = -\omega_{ji}^{ab} = -\omega_{ij}^{ba}$ и e_{ij}^a – вещественные переменные. Каждому 0-симплексу или вершине a_i сопоставим взаимно сопряженные дираковские спиноры ψ_i и $\overline{\psi}_i$. Индексом A нумеруем 4-симплексы. С каждым 4-симплексом $a_ia_ja_ka_la_m$ с индексом A свяжем число $\varepsilon_{Aijklm} = \pm 1$, знак которого зависит от ориентации этого 4-симплекса. Обозначения $\overline{\psi}_{Ai}$, ψ_{Ai}, $\hat{e}_{Aij}$, Ω_{Aij} и так далее указывают на то, что ребро a_ia_j принадлежит 4-симплексу с индексом A. Действие гравитационного и дираковского полей, ассоциированное с комплексом $\mathfrak{K}$, имеет вид

$$\begin{gathered} I = \frac{1}{5\times 24}\sum_A \sum_{i,j,k,l,m} \varepsilon_{Aijklm}\mathrm{tr}\,\gamma^5 \times \\ \times\left\{-\frac{1}{2\,l_P^2}\Omega_{Ami}\Omega_{Aij}\Omega_{Ajm}\hat{e}_{Amk}\hat{e}_{Aml} + \right. \\ \left. +\frac{1}{24}\hat{\Theta}_{Ami}\hat{e}_{Amj}\hat{e}_{Amk}\hat{e}_{Aml}\right\}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \hat{\Theta}_{Aij} = \frac{i}{2}\gamma^a\left(\overline{\psi}_{Ai}\gamma^a\Omega_{Aij}\psi_{Aj} - \overline{\psi}_{Aj}\Omega_{Aji}\gamma^a\psi_{Ai}\right) \equiv \\ \equiv \Theta_{Aij}^a\gamma^a \in V. \end{gathered} \tag{3}$$

Это действие инвариантно относительно следующих калибровочных преобразований:

$$\tilde{\Omega}_{A\,ij} = S_{A\,i}\,\Omega_{A\,ij}\,S_{A\,j}^{-1},$$
$$\tilde{e}_{A\,ij} = S_{A\,i}\,e_{A\,ij}\,S_{A\,i}^{-1},$$
$$\tilde{\psi}_{A\,i} = S_{A\,i}\,\psi_{A\,i}, \qquad \tilde{\overline{\psi}}_{A\,i} = \overline{\psi}_{A\,i}\,S_{A\,i}^{-1},$$

где $S_{A\,i} \in \mathrm{Spin}(4)$.

Выпишем выражение для статистической суммы Z в теории дискретной евклидовой гравитации, которая превращается в трансфер-матрицу после перехода к лоренцевой сигнатуре. Занумеруем вершины и ребра симплекса индексами $\mathcal{V}$ и $\mathcal{E}$, соответственно, и обозначим $\psi_{\mathcal{V}}$, $\Omega_{\mathcal{E}}$, и т.д. соответствующие им переменные. По определению,

$$\begin{gathered} Z = \mathrm{const}\cdot\left(\prod_{\mathcal{E}}\int d\Omega_{\mathcal{E}}\int de_{\mathcal{E}}\right)\times \\ \times\Big(\prod_{\mathcal{V}} d\overline{\psi}_{\mathcal{V}}\,d\psi_{\mathcal{V}}\Big)\,\exp\big(-I\big)\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $d\Omega_{\mathcal{E}}$ – инвариантная мера на группе Spin(4). Остальные меры не нуждаются в комментариях.

Действие (2) имеет наивный континуальный предел. Для перехода к континуальному пределу следует ввести обычные локальные координаты вершин

$$x_{A\,i}^{\mu} \equiv x^{\mu}(a_{A\,i}), \qquad \mu = 1,\,2,\,3,\,4,$$

с таким расчетом, чтобы разности координат соседних вершин были малы и линейно независимы:

$$dx_{A\,ji}^{\mu} \equiv x_{A\,i}^{\mu} - x_{A\,j}^{\mu} \sim a,$$

$$\begin{vmatrix} dx_{A\,m1}^1 & dx_{A\,m1}^2 & \ldots & dx_{A\,m1}^4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ dx_{A\,m4}^1 & dx_{A\,m4}^2 & \ldots & dx_{A\,m4}^4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Здесь a – некая константа размерности длины, которая имеет масштаб порядка эффективного шага решетки. В наивном континуальном пределе предполагается, что все введенные переменные Ω, $\hat{e}$, ψ, $\overline{\psi}$ мало изменяются при переходе к соседним симплексам и, кроме того, $e_{A\,mi} \sim a$, и элементы $\Omega_{A\,mi}$ близки к единице. Последнее означает, что $\omega_{A\,mi} \to 0$. Рассмотрим системы линейных уравнений

$$\begin{gathered} \omega_{A\,m\mu}\,dx_{A\,mi}^{\mu} = \omega_{A\,mi}, \quad e_{A\,m\mu}\,dx_{A\,mi}^{\mu} = e_{A\,mi}, \\ i = 1,\,2,\,3,\,4, \end{gathered} \tag{5}$$

однозначно определяющие 1-формы $\omega_{A\,m\mu}$ и $e_{A\,m\mu}$. Пусть 1-симплекс $X_{m\,i}^A = a_ma_i$ принадлежит 4-симплексам с индексами A_1, A_2, ... , A_r. Легко увидеть, что средняя величина

$$\omega_{\mu}\left[\frac{1}{2}\left(x_{A\,m} + x_{A\,i}\right)\right] \equiv \frac{1}{r}\left\{\omega_{A_1\,m\mu} + \ \ldots + \omega_{A_r\,m\mu}\right\},$$

определяемая одним лишь 1-симплексом a_ma_i, удовлетворяет соотношению

$$\omega_{\mu}\left[\frac{1}{2}\left(x_{A\,m} + x_{A\,i}\right)\right]\,dx_{A\,mi}^{\mu} = \omega_{A\,mi} \equiv \omega = \omega_{\mu}\,dx^{\mu}.$$

Аналогичным образом определяется 1-форма $e = e_{\mu}\,dx^{\mu}$.

Теперь легко показать, что в длинноволновом пределе решеточное действие (2) переходит в известное действие континуальной теории Эйнштейна в форме Палатини:

$$I = \int\varepsilon_{abcd}\left\{-\frac{1}{l_P^2}\big(R^{ab}\wedge e^c\wedge e^d + \frac{1}{6}\Theta^a\wedge e^b\ \wedge e^c\wedge e^d\right\},$$

$$d\omega^{ab} + \omega_c^a\wedge\omega^{cb} = \frac{1}{2}\,R^{ab}, \tag{6}$$

$$\Theta^a = \frac{i}{2}\left(\bar\psi\,\gamma^a\,\mathcal{D}_\mu\psi - \mathcal{D}_\mu\bar\psi\,\gamma^a\,\psi\right)dx^\mu,$$
$$\mathcal{D}_\mu\,\psi_{A\,i} = \partial_\mu\,\psi_{A\,i} + \omega_{A\,i\mu}\,\psi_{A\,i}.$$

Обратим внимание на важнейшее свойство теории: в длинноволновом пределе полностью теряется информация о структуре исходной решетки: действие (6) не зависит от расположения вершин решетки в континуальном 4-пространстве. Далее это свойство будет использоваться.

4. Теперь приступим к формулировке и изучению проблемы удвоения фермионных состояний в описанной выше дискретной теории гравитации. Чтобы решить поставленную задачу, ситуацию следует предельно упростить. Поэтому далее мы полагаем:

$$\Omega_{ij} = 1\,, \quad \left(e^a_{ij} + e^a_{jk} + \ldots + e^a_{li}\right) = 0. \tag{7}$$

Здесь сумма в круглых скобках берется по любому замкнутому пути, состоящему из 1-симплексов. Уравнения (7) означают, что кривизна и кручение равны нулю. Таким образом, геометрическая реализация комплекса $\mathfrak{K}$ находится в евклидовой гиперплоскости, так что декартовы координаты вершины a_i имеют значения x^a_i и $e^a_{ij} = x^a_j - x^a_i$ есть декартовы компоненты вектора, начало и конец которого находятся в вершинах a_i и a_j, соответственно. Заметим, что при выполнении (7) имеем $\Theta^a_{ij} = -\Theta^a_{ji}$. Далее будем называть две вершины соседними, если они образуют границу одного ребра.

В континуальном пределе равенства (7) переписываются как $\oint e^a = 0$, причем здесь интегралы берутся по всем контурам. Отсюда вытекает, что $de^a = 0$, и $\omega^{ab} = 0$ есть единственное решение уравнения

$$de^a + \omega^{ab}\wedge e^b = 0.$$

Выпишем уравнение для собственных мод дискретного оператора Дирака в частном случае (7). Последний получается путем варьирования действия (2) относительно переменной $\overline{\psi_i}$. В четырехмерном случае имеем (см. [7]):

$$\frac{i}{4}\sum_{j(i)} S^a_{ij}\gamma^a\psi_j = \epsilon\, v_i\psi_i, \tag{8}$$

где

$$S^a_{ij} = (3!)^{-2}\sum_{A(i,j)}\times$$
$$\times\sum_{k,l,m}\varepsilon^{acdf}\varepsilon_{A(i,j)\,ijklm}e^c_{A(i,j)ik}e^d_{A(i,j)il}e^f_{A(i,j)im}. \tag{9}$$

Здесь индекс $A(i,j)$ нумерует все 4-симплексы, содержащие ребро a_ia_j, индекс $j(i)$ нумерует все вершины $a_{j(i)}$, соседние с вершиной a_i, а v_i – ориентированный 4-объем той части комплекса, которая содержит лишь вершину a_i и совокупность вершин $\{a_{j(i)}\}$. Имеют место соотношения

$$\sum_{j(i)} S^a_{ij}\,e^b_{ij} = 4\,v_i\,\delta^{ab}, \quad \sum_{j(i)} S^a_{i,j} \equiv 0, \tag{10}$$

с учетом которых дискретное уравнение (8) в длинноволновом пределе переходит в континуальное:

$$i\gamma^a\partial_a\psi = \epsilon\,\psi. \tag{11}$$

Действительно, для этого следует лишь учесть, что в длинноволновом пределе, то есть для обычных мод, с достаточной точностью

$$\psi_j = \psi_i + e^a_{ij}\partial_a\psi_i. \tag{12}$$

Здесь x^a – декартовы координаты в том же ортогональном базисе, в котором задаются компоненты векторов e^a_{ij}. Отсюда опять видно, что в длинноволновом пределе информация о положении вершин комплекса полностью теряется, обычные длинноволновые моды теряют информацию о структуре решетки. Собственные значения мод оператора Дирака (11) равны $\epsilon = \pm|k|$, где k^a – волновой вектор моды. Таким образом, собственные значения обычных мод могут быть сколь угодно малы.

Главный результат работ [6, 7] заключался в том, что в рассматриваемой теории существуют решетки двух типов. На одних решетках имеет место явление фермионного удвоения, а на других оно отсутствует. Приведем примеры этих двух типов решеток.

Сначала рассмотрим решетку, на которой имеет место явление фермионного удвоения. Для иллюстрации на рис.1 изображена двумерная решетка, однако приведенное ниже рассуждение остается справедливым также и в многомерном случае. Аналог уравнения (8) на двумерной решетке в случае нулевых мод ($\epsilon = 0$) для верхней компоненты дираковского пол допускает следующую запись:

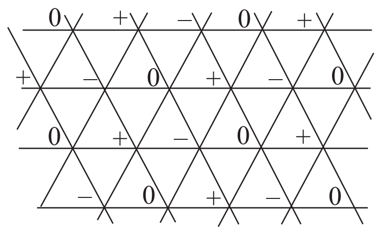

Рис.1

$$\sum_{j(i)}\left(z_{j+1} - z_{j-1}\right)\varphi_j = 0 \longleftrightarrow \sum_{j(i)} z_j\left(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}\right) = 0. \tag{13}$$

Здесь индекс $j(i)$ изменяется на единицу при переходе к соседней вершине в процессе последовательного движения вдоль границы объема v_i, который в двумерном случае состоит из всех треугольников комплекса, содержащих вершину a_i; x_j, y_j – декартовы координаты вершины a_j, $z_j = x_j + i\,y_j$ – ее комплексная координата.

Предположим, что все внутренние вершины комплекса имеют четное число соседних вершин. Кроме того, пусть все множество внутренних вершин разбивается на конечное число подмножеств (в случае, изображенном на рис.1, – три: $\{a_{i'}\}$, $\{a_{i''}\}$, $\{a_{i'''}\}$) таких, что в систему уравнений для нулевой моды (13) входят лишь разности $(\psi_{j'_1} - \psi_{j'_2})$, $(\psi_{j''_1} - \psi_{j''_2})$, $(\psi_{j'''_1} - \psi_{j'''_2})$. Важно, что при этом координаты вершин находятся в общем положении. Пол $\psi_{j'}$, $\psi_{j''}$, $\psi_{j'''}$ будем называть ветвями нулевой моды. Тогда заведомо имеет место явление вильсоновского удвоения (влиянием границы при $\alpha_0 \longrightarrow \infty$ можно пренебречь). Именно такой пример изображен на рис.1, где вершины из трех таких подмножеств вершин отмечены индексами $0, \pm$. Нетривиальная нулевая мода может быть взята, например, в виде $\varphi^0 = c \neq 0$, $\varphi^{\pm} = [\exp{(\pm 2\pi i/3)}]\, c$. Здесь φ^0, $\varphi^{\pm}$ – значения поля φ в вершинах, помеченных на рис.1 индексами $0, \pm$, соответственно. Указанная нетривиальная мода ортогональна тривиальной $\varphi_i = \mathrm{const}$ (в естественной на правильной решетке мере $\sum_i \overline{\psi}_i\, \psi_i$) и потому независима. В этом примере мы имеем 3 ветви нетривиальной нулевой моды.

Теперь приведем пример двумерной решетки, на которой отсутствует явление вильсоновского удвоения. На рис.2 изображен фрагмент такой решетки.

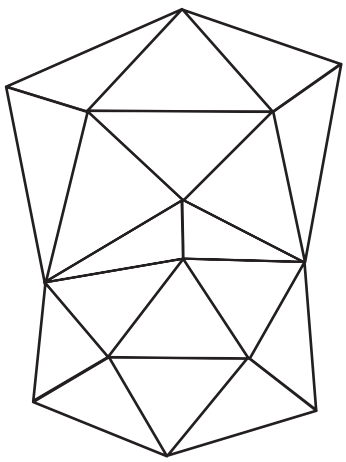

Рис.2

Решетка на рис.2 отличается от решетки на рис.1 тем, что на ней в каждой внутренней вершине сходится нечетное число ребер. В работах [1, 2] доказано, что на таких решетках вильсоновское удвоение фермионных состояний отсутствует, а также построены многомерные аналоги таких решеток.

Далее важно следующее: согласно определению, решетка допускает “фермионное удвоение состояний”, если у дискретного оператора Дирака (8) существуют моды двух типов с собственными значениями, стремящимися к нулю[2)]. Качественное различие между ними заключается в следующем: Нормированные моды первого типа, или нормальные моды, удовлетворяют условиям

$$|\psi_i - \psi_j| \sim |\epsilon|\, |\psi_j| \sim |\epsilon|\, N^{-1/2},$$

где a_i и a_j – соседние вершины, ϵ – собственное значение моды (см. уравнение (8)) и N – число вершин комплекса. Нормированные моды второго типа, или аномальные моды, для некоторых соседних вершин, число которых соизмеримо с общим числом вершин комплекса, удовлетворяют условиям

$$|\psi_i^{\mathcal{A}} - \psi_j^{\mathcal{A}}| \sim |\psi_j^{\mathcal{A}}| \sim N^{-1/2}. \qquad (14)$$

Термин “фермионное удвоение состояний” взят здесь в кавычки по той причине, что аномальные мягкие моды, если даже они и существуют на решетке, в рассматриваемой теории не могут распространяться в континуальном пределе подобно обычным мягким модам. Об этом можно судить по длинноволновому поведению корреляторов тех полей, которые по отдельности описывают обычные и аномальные моды. Оценка этих корреляторов проводится ниже и является результатом этой работы.

Заметим, что в теориях, описанных в п. 1, корреляторы полей обычных и аномальных мягких мод ведут себя по сути одинаково в длинноволновом пределе. Это означает, что на больших расстояниях эти корреляторы убывают в точности одинаково. Этот факт легко устанавливается в случае простых гиперкубических решеток. Поэтому явление фермионного удвоения и является действительно удвоением числа фермионных длинноволновых состояний.

Соотношения (14) означают, что значения аномальных мод, вообще говоря, скачкообразно изменяются при переходе к соседним вершинам. Отсюда немедленно следует, что производные аномальных мод $\partial_a \psi_i^{\mathcal{A}}$ также в общем случае скачкообразно изменяются при переходе к соседним вершинам. В противном случае из уравнений (8) и (10) мы получили бы

[2)] Конечно, предполагается, что размеры решетки (то есть число ее симплексов) стремятся к бесконечности.

уравнение $i\gamma^a\partial_a\psi^{\mathcal{A}} = \epsilon\,\psi^{\mathcal{A}}$, в котором левая часть непрерывна, а правая – разрывна. Более того, производные аномальных мод по разным направлениям оказываются несоизмеримыми.

Далее показывается, что эффективное уравнение в континуальном пределе, описывающее аномальные моды, имеет вид

$$i\alpha^a(x)\partial_a g^{\mathcal{A}}(x) = \epsilon\, g^{\mathcal{A}}(x). \tag{15}$$

Здесь $\alpha^a(x)$ – случайные функции в том смысле, который будет указан ниже.

Действительно, пусть $\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s\,j}$, $s = 1,\,2,\,\dots$ – полный набор нулевых аномальных мод[3]. Очевидно, любая линейная комбинация нулевых мод также является нулевой модой. Поэтому будем искать мягкую аномальную моду, "растущую" от нулевых аномальных мод, в виде $\psi^{\mathcal{A}}_j = \sum_s g^{\mathcal{A}}_{s\,j}\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s\,j}$, где числовое поле $g^{\mathcal{A}}_{s\,j}$ является медленно меняющимся. Для получения уравнения, которому подчиняется поле $g^{\mathcal{A}}_{s\,j}$, подставим выражение для мягкой аномальной моды в уравнение (8):

$$\frac{i}{4}\sum_{j(i)} S^a_{ij}\gamma^a \sum_{s'}\left[\left(g^{\mathcal{A}}_{s'\,j} - g^{\mathcal{A}}_{s'\,i}\right) + g^{\mathcal{A}}_{s'\,i}\right]\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s'\,j} =$$
$$= \frac{i}{4}\sum_{j(i)} S^a_{ij}\gamma^a \sum_{s'}\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s'\,j}\left(g^{\mathcal{A}}_{s'\,j} - g^{\mathcal{A}}_{s'\,i}\right) =$$
$$= \epsilon\, v_i \sum_{s'} g^{\mathcal{A}}_{s'\,i}\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s'\,i}. \tag{16}$$

Первое равенство в (16) является следствием того, что $\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s\,j}$, $s = 1,\,2,\,\dots$ – нулевые моды. Из второго равенства (16) видно, что для медленно изменяющихся полей $g^{\mathcal{A}}_{s\,i}$ собственное значение ϵ может быть сколь угодно малым. В последнем случае уравнение (16) приводится к виду

$$\frac{i}{4v_i}\sum_{s'}\left[\sum_{j(i)}\left(\bar\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s\,i} S^a_{ij} e^b_{ij}\gamma^a\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s'\,j}\right)\right]\partial_b g_{s'\,i} =$$
$$= \epsilon\left[\sum_{s'}\bar\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s\,i}\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s'\,i}\right] g^{\mathcal{A}}_{s'\,i}.$$

Умножая последнее уравнение на матрицу $\left[\bar\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s\,i}\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s'\,i}\right]^{-1}$, приводим его к виду (15), где

$$\alpha^a_{s\,s'} = \frac{1}{4v_i}\sum_{s''}\left[\bar\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s\,i}\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s''\,i}\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[\sum_{j(i)}\left(\bar\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s''\,i} S^a_{ij} e^b_{ij}\gamma^a\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s'\,j}\right)\right]. \tag{17}$$

[3] Нулевые моды удовлетворяют уравнению (8) с нулевой правой частью.

Таким образом, оператор в правой части уравнения (15) является дифференциальным оператором первого порядка с переменными матричными коэффициентами, действующим на многокомпонентную функцию $g_s(x)$, $s = 1, 2, \dots$. Так как уравнение (8) вытекает из эрмитового действия (2), а эффективное уравнение (15) – из уравнения (16), то оператор в левой части уравнения (15) – эрмитов.

Величины (17) является абсолютно нерегулярными функциями, существенно и локально зависящими от положения вершин комплекса. Продемонстрируем это в случае двумерной гравитации на двумерном комплексе, когда формулы становятся легко обозримыми. Пусть вершина a_i находится в начале координат, а вершины a_j, $j = 1, \dots, 4$ – ее ближайшие соседи и $e^a_{ij} = (x_j, y_j)$ – декартовы координаты соответствующей вершины. Предположим, что[4] $\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s\,k} = \pm 1$ и $\gamma^1 = \sigma^1$, $\gamma^2 = \sigma^2$. Тогда, если $\psi^{\mathcal{A}(0)}_1 = \psi^{\mathcal{A}(0)}_3 = -\psi^{\mathcal{A}(0)}_2 = -\psi^{\mathcal{A}(0)}_4 = 1$, то

$$\sum_{j=1}^{4}\left(\bar\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s\,i} S^b_{ij} e^a_{ij}\gamma^b\psi^{\mathcal{A}(0)}_{s'\,j}\right) \sim \big((x_3 - x_1)(y_4 - y_2) +$$
$$+ (x_4 - x_2)(y_3 - y_1),\ 2(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)\big). \tag{18}$$

Мы видим, что компоненты вектора (18) существенно зависят от динамических переменных (поля e^a_{ij}), причем эта зависимость – пространственно-локальная. Здесь важно, что в рассматриваемой теории переменные $\{e^a_{ij}\}$ могут независимо изменяться в интеграле (4) в достаточно широком диапазоне без изменения действия. Это утверждение становится точным в континуальном пределе в том случае, когда учитываются лишь длинноволновые моды полей с длинами волн, существенно бо́льшими шага решетки (см. формулу (6) и предшествующие, а также работы [6, 7]). Действительно, континуальное действие (6) выражается через 1-формы $\omega_{A\,m\mu}$ и $e_{A\,m\mu}$, которые определяются при помощи уравнений (5). Очевидно, эти 1-формы не изменяются (и потому не изменяется действие (6)) при изменении правых частей уравнений (5) и одновременном соответствующем изменении дифференциалов $dx^\mu_{A\,mi}$. Описанная инвариантность действия связана с калибровочной инвариантностью теории (которая, конечно, точна́ также и на решетке).

Таким образом, компоненты $\alpha^a(x)$ в уравнении (15) являются переменными функциями аргумента x, существенно и локально зависящими от переменных интегрирования $\{e_{\mathcal{E}}\}$ в интеграле (4).

[4] Такого типа решения для нулевых мод были указаны в работах [6, 7] на соответствующих комплексах.

Предположим, что эти компоненты представляются в виде

$$\alpha^a(x) = \beta^a(x) + \lambda\rho^a, \qquad (19)$$

где $\rho^a_{s\,s'}$ – постоянная матрица, λ – малый числовой параметр и все нечетные степени величины $\beta(x)$ под знаком интеграла (4) обращаются в нуль:

$$\left\langle\, |\beta(x_1)\,\ldots\,\beta(x_{2n+1})\,|\,\right\rangle_{e_\mathcal{E}} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots . \qquad (20)$$

Точки $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ могут частично или полностью совпадать между собой. Усреднение в (20) обозначает усреднение при помощи функционального интеграла (4). При этом нижний индекс $\{e_\mathcal{E}\}$ указывает на тот факт, что интегрирование ограничивается переменными[5] $\{e_\mathcal{E}\}$. Предположим также, что параметр λ относительно мал, так что разложение по этому параметру имеет смысл. Последнее предположение оправдывается тем, что, согласно вышеизложенному, величины $\alpha(x)$ сильно и локально зависят от переменных $\{e_\mathcal{E}\}$, в то время как в континуальном пределе действие (2) слабо зависит от этих переменных.

В изучаемой теории при рассмотрении задачи об S-матрице (что имеет смысл лишь в континуальном пределе) все S-матричные элементы еще до вычисления вероятностей и сечений должны быть усреднены по переменным $\{e_\mathcal{E}\}$. Отсюда вытекает, что если вершины, описывающие взаимодействие, универсальны (то есть не зависят от микроструктуры решетки не только для нормальных, но и для аномальных мод)[6], то пропагаторы полей материи в такой теории должны быть усреднены по переменным $\{e_\mathcal{E}\}$. Действительно, здесь, как и обычно, диаграммная техника может быть получена как результат разложения относительно функционального дифференциального оператора, действующего на амплитуду перехода полей материи в квадратичном (свободном) приближении на фоне внешних источников полей. При этом квадратичная амплитуда перехода должна быть усреднена с весом по переменным $\{e_\mathcal{E}\}$ еще до разложения по взаимодействию.

Нам необходимо найти пропагатор

$$\langle\psi^\mathcal{A}\bar{\psi}^\mathcal{A}\rangle_{e_\mathcal{E}} = \psi^{\mathcal{A}(0)}\big\langle\big(-i\alpha^a\partial_a\big)^{-1}\big\rangle_{e_\mathcal{E}}\bar{\psi}^{\mathcal{A}(0)}, \qquad (21)$$

описывающий распространение аномальных мод. Следовательно, задача свелась к изучению гриновской функции оператора в левой части уравнения (15), усредненной по переменным $\{e_\mathcal{E}\}$ с учетом правила[7] (20):

$$\big\langle\big(-i\alpha^a\partial_a\big)^{-1}\big\rangle_{e_\mathcal{E}}. \qquad (22)$$

5. Рассмотрим сначала случай $\lambda = 0$. Для проведения нужного усреднения в (22) воспользуемся известной формулой

$$\mathcal{P}\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} ds\,\big[e^{is\tau} - e^{-is\tau}\big]\,. \qquad (23)$$

По смыслу формулы (23) переменная $\tau \neq 0$, или $\tau^{-1} \neq \pm\infty$. При помощи (23) перепишем оператор (22) (в случае $\lambda = 0$, до усреднения по переменным $\{e_\mathcal{E}\}$) как

$$\langle x|\big(-i\beta^a\partial_a\big)^{-1}|y\rangle = \\ = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} ds\,\langle x|\,\Big[e^{s\beta^a\partial_a} - e^{-s\beta^a\partial_a}\Big]\,|y\rangle. \qquad (24)$$

Поскольку при $x \neq y$ левая часть уравнения (24) конечна, то в этом случае уравнение (24) имеет смысл. Однако при $x = y$ представление (24) бессмысленно. Теперь усредним слагаемые в квадратных скобках в (24) по переменным $\{e_\mathcal{E}\}$. Здесь важно лишь то, что вследствие (20) результат такого усреднения каждого из этих слагаемых является функцией от $(\pm s)^2 = s^2$, но не от $(\pm s)$. Поэтому в результате усреднения по переменным $\{e_\mathcal{E}\}$ слагаемые в квадратных скобках в (24) взаимно сокращаются и, таким образом, пропагатор, описывающий распространение аномальных мод, пропорционален δ-функции в x-пространстве:

$$\Big\langle\langle x|\big(-i\beta^a\partial_a\big)^{-1}|y\rangle\Big\rangle_{e_\mathcal{E}} \sim a\,\delta^{(4)}(x-y). \qquad (25)$$

Напомним, что a – некая константа размерности длины, которая имеет масштаб порядка эффективного шага решетки.

Теперь оценим величину (22) при ненулевом λ. При проведении этой оценки воспользуемся возможностью разложения величины (22) по параметру λ.

Рис.3

Эта задача легко решается при помощи теоретико-полевых методов. На рис.3 графически представле-

[5] Вследствие ограничений (7) переменные $\{\Omega_\mathcal{E}\}$ в рассматриваемой задаче вообще не играют роли.

[6] Именно такая ситуация имеет место в теориях на регулярной решетке с действием вида (1). В случае же нарушения этого условия относительно взаимодействия аномальных мод понятие вильсоновского удвоения,по-видимому, вообще теряет смысл.

[7] Нельзя здесь не отметить фундаментального расхождения используемой вычислительной процедуры с таковой в задачах о локализации частиц в случайных потенциалах. Физическая разница ситуаций заключается в том, что в последнем случае параметры, характеризующие случайность потенциала, не являются динамическими степенями свободы, в то время как положения вершин комплекса являются динамическими переменными.

на сумма диаграмм, которая соответствует величине (22). Сплошная линия соответствует невозмущенному пропагатору (25), а вставка-крестик – оператору $i\lambda\rho^a\partial_a$.

Теперь при помощи обычных правил диаграммной техники величина (25) представляется в виде следующего ряда графиков.

В результате δ-функция затравочного пропагатора "размазывается", и нужный нам пропагатор, описывающий распространение аномальных мод, оказывается экспоненциально убывающим в x-пространстве:

$$\left\langle \langle \psi^{\mathcal{A}}(x)\overline{\psi}^{\mathcal{A}}(y)\rangle \right\rangle_{e\varepsilon} \sim \exp\left[-\frac{|x-y|}{a\lambda}\right]. \qquad (26)$$

В то же время, согласно (11), свободный пропагатор, описывающий распространение нормальных мод, в x-представлении убывает с ростом расстояния строго по степенному закону:

$$(i\gamma^a\partial_a)^{-1}(x,\,y) = \frac{\not{x}-\not{y}}{2\pi^2((x-y)^2)^2}. \qquad (27)$$

Из сравнения формул (26) и (27) следует вывод об отсутствии явления вильсоновского удвоения фермионных состояний в рассматриваемой теории даже в том случае, когда комплекс допускает существование мягких аномальных мод.

6. В заключение кратко сформулируем выводы.

1) В работах [6, 7] были приведены примеры таких симплициальных комплексов, на которых отсутствует явление вильсоновского удвоения фермионных состояний. Там же приводились также примеры таких комплексов, на которых заведомо формально имеет место вильсоновское удвоение.

2) На комплексах, формально допускающих удвоение фермионных состояний, фактически это явление отсутствует по той причине, что нормальные и аномальные фермионные моды распространяются в пространстве-времени совершенно по-разному. Нормальные моды (в пределе длинных волн) обладают определенными энергией и импульсом. Напротив, аномальные моды не могут обладать определенными энергией и импульсом и их пропагаторы затухают экспоненциально быстро в пространстве-времени на масштабах, соизмеримых с характерным масштабом решетки. Таким образом, утверждения работ [6, 7] здесь существенно корректируются в сторону их усиления.

Приведем некоторые общие соображения, вытекающие из полученных результатов.

Предположим, что в случае 2) на решетке введено одно вейлевское поле. Это достигается путем введения в фермионное действие в (2), (3) проекционного оператора $(1/2)(1\pm\gamma^5)$. Поскольку решеточное фермионное действие инвариантно относительно глобальных, а решеточная фермионная мера инвариантна также относительно и локальных γ^5-преобразований, то полный фермионный ток строго сохраняется. Однако это не значит, что сохраняются по отдельности токи нормальных и аномальных мод. Напротив, хорошо и весьма давно известно, что при вычислении S-матричных элементов, когда используются причинные фейнмановы пропагаторы, ток вейлевского поля не сохраняется за счет калибровочной аномалии. Это явление в рассматриваемой теории интерпретируется как взаимное перетекание аксиального заряда между нормальными и аномальными модами.

Укажем также, что в рассматриваемой теории теоретически не исключается также и такой случай, когда аксиальные заряды нормальных и аномальных мод сохраняются по отдельности (см. [7]). Это означает, что аксиальная аномалия отсутствует. Такой режим может иметь место лишь в тех задачах, когда использование фейнмановых пропагаторов некорректно. Например, это может быть на стадии инфляции Вселенной, когда задача об S-матрице не имеет смысла.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Российского фонда фундаментальных исследований # 04-02-16970 и НШ# 2044.2003.2.

1. K. G. Wilson, Erice lectures notes, 1975.
2. J. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D **11**, 393 (1975).
3. L. Susskind, Phys. Rev. D **16**, 3031 (1977).
4. Martin Luscher, E-print archives hep-th/0102028.
5. H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B **185**, 20 (1981); Nucl. Phys. B **193**, 173 (1981).
6. С. Н. Вергелес, Письма в ЖЭТФ **76**, 3 (2002).
7. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **124**, 1203 (2003).
8. С. Н. Вергелес, ЖЭТФ **120**, 1069 (2001).
9. S. N. Vergeles, arXiv: hep-th/0411096.