

## Новая формулировка вклада адронов в аномальный магнитный момент мюона

Ю. М. Быстрицкий<sup>1)</sup>, Э. А. Кураев<sup>1)</sup>, А. В. Богдан<sup>+</sup>, Ф. В. Игнатов<sup>+</sup>, Г. В. Федотович<sup>1)</sup>+

*Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Московская обл., Россия*

*Институт ядерной физики имени Будкера Сибирского отд. РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 15 декабря 2005 г.

Предложен новый вид вклада адронов в аномальный магнитный момент мюона, основанный на соглашении о форме сечения однофотонной аннигиляции лептонной пары в адроны, предусматривающем включение в него эффектов поляризации вакуума лептонами. Формула для адронного вклада содержит свертку экспериментально измеримого сечения аннигиляции в адроны с некоторой стандартной функцией. Наше замечание касается радиационной поправки к этой функции. Предложена конкретная форма этой поправки. Мы показываем, что использование новой функции позволит сократить неопределенности во вкладах такого типа за счет радиационных поправок до уровня  $\delta a_h/a_h \sim 10^{-4}$ .

PACS: 13.40.–f

Аномальный магнитный момент мюона  $a_\mu$  является лабораторией для исследования новой физики вне стандартной модели (СМ) (см. работу [1] и ссылки в ней). Однако прежде чем делать выводы относительно новой физики необходимо оценить уровень точности учета вклада адронов, поскольку он является доминирующим. При этом важным является оценка теоретических и экспериментальных допущений.

Мотивация нашей работы – предложить более естественную форму учета эффекта поляризации вакуума адронами, учитывая также и радиационные поправки к нему.

Вклад в аномальный магнитный момент мюона, рассчитываемый в рамках СМ, представляется в виде суммы трех слагаемых:  $a_\mu = a_\mu^{QED} + a_\mu^{EW} + a_\mu^{hadr}$ . Обычно считается, что часть  $a_\mu^{hadr}$  содержит только эффекты поляризации вакуума адронами (мы не рассматриваем здесь адронные вклады типа рассеяния света на свете) и представляется в виде (см. например, [2, 3]):

$$a_\mu^{hadr} = \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds}{s} R(s) \left[ K^{(1)}(s) + \frac{\alpha}{\pi} K^{(2)}(s) \right]. \quad (1)$$

Ядро  $K^{(1)}(s)$  имеет вид

$$K^{(1)}(s) = \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + \rho(1-x)}, \quad \rho = \frac{s}{M^2}, \quad (2)$$

где  $M$  – масса мюона и

$$R(s) = \frac{\sigma_0^{e^+e^- \rightarrow hadr}(s)}{\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s)} = 12\pi \operatorname{Im}_h \Pi(s), \quad (3)$$

$$\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s},$$

величина  $\operatorname{Im}_h \Pi(s)$  обозначает мнимую часть оператора поляризации вакуума  $\Pi(s)$ , отвечающую адронному промежуточному состоянию.

Необходимо заметить, что величина  $\sigma_0^{e^+e^- \rightarrow hadr}(s)$ , которая входит в  $R(s)$ , является несколько искусственной, поскольку она не включает эффектов поляризации виртуального фотона ( $e^+ + e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow hadr$ ). Естественная величина (включающая эти эффекты) получается заменой

$$\operatorname{Im}_h \Pi(s) \rightarrow \operatorname{Im}_h \left( \frac{\Pi(s)}{1 - \Pi(s)} \right) = \frac{\operatorname{Im}_h \Pi(s)}{|1 - \Pi(s)|^2},$$

$$\Pi(s) = \Pi_l(s) + \Pi_h(s), \quad \operatorname{Im}_h \Pi(s) = \operatorname{Im} \Pi_h(s), \quad (4)$$

где  $\Pi_l(s)$  и  $\Pi_h(s)$  представляют вклады лептонов (доминирующие численно) и адронов в оператор поляризации вакуума. Мы считаем, что величина  $\sigma_{exp}^{e^+e^- \rightarrow hadr}(s)$ , определенная как:

$$\sigma_{exp}^{e^+e^- \rightarrow hadr}(s) = \frac{\sigma_0^{e^+e^- \rightarrow hadr}(s)}{|1 - \Pi(s)|^2}, \quad (5)$$

отвечает измеряемой на опыте величине, в отличие от  $\sigma_0^{e^+e^- \rightarrow hadr}(s)$ , рассчитанной без учета поляризации вакуума виртуального фотона.

<sup>1)</sup>e-mail: bystr@theor.jinr.ru, kuraev@theor.jinr.ru, G.V.Fedotovitch@inp.nsk.su

**Модификация ядра во втором приближении.** Принимая это соглашение, надо модифицировать  $a_\mu^{\text{hadr}}$  соответствующим образом. Прежде всего, мы должны заменить  $\sigma_0^{e^+e^- \rightarrow \text{hadr}}(s) \rightarrow \sigma_{\text{exp}}^{e^+e^- \rightarrow \text{hadr}}(s)$ . Ядро  $K^{(1)}(s)$  остается без изменений, но поправка к нему по электромагнитной константе связи  $K^{(2)}(s)$  должна быть изменена, чтобы избежать двойного счета. Соответствующая модификация состоит в удалении вкладов всех диаграмм Фейнмана, содержащих две последовательные вставки, отвечающие поляризации вакуума (как лептонную, так и адронную, или смешанную), в одну и ту же функцию Грина виртуального фотона.

Это изменение сводится к удалению вкладов  $K^{(2b,2c)}(s)$  (мы используем обозначения из работы [3]). Что касается  $K^{(2a)}(s)$ , то эта величина должна быть модифицирована – мы должны вычесть вклад диаграмм Фейнмана, рис.1), которые содержат мюонный оператор поляризации вакуума вместе с адронным.

Таким образом, предлагаемый нами результат состоит в замене ядра  $K^{(2a)}(s)$  [4–6]:

$$\begin{aligned}
K^{(2a)}(s) = & -\frac{139}{144} + \frac{115}{72}\rho + \left(\frac{19}{12} - \frac{7}{36}\rho + \frac{23}{144}\rho^2 + \frac{1}{\rho-4}\right)L + \\
& + \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{4}{3} + \frac{127}{36}\rho - \frac{115}{72}\rho^2 + \frac{23}{144}\rho^3\right) \ln y + \\
& + \left(\frac{9}{4} + \frac{5}{24}\rho - \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{\rho}\right)\zeta_2 + \\
& + \frac{5}{96}\rho^2 L^2 + \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{1}{2}\rho + \frac{17}{24}\rho^2 - \frac{7}{48}\rho^3\right) L \ln y + \\
& + \left(\frac{19}{24} + \frac{53}{48}\rho - \frac{29}{96}\rho^2 - \frac{1}{3\rho} + \frac{2}{\rho-4}\right) \ln^2 y + \\
& + \frac{1}{\Delta} \left(-2\rho + \frac{17}{6}\rho^2 - \frac{7}{12}\rho^3\right) D_p(\rho) + \\
& + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{13}{3} - \frac{7}{6}\rho + \frac{1}{4}\rho^2 - \frac{1}{6}\rho^3 - \frac{4}{\rho-4}\right) D_m(\rho) + \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6}\rho + \frac{1}{2}\rho^2\right) T(\rho), \quad (6)
\end{aligned}$$

где  $L = \ln(s/M^2)$ ,  $\Delta = \sqrt{\rho(\rho-4)}$ ,  $\zeta_2 = \pi^2/6$  и

$$y = \frac{\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho-4}}{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho-4}},$$

$$D_p(\rho) = Li_2(y) + \ln y \ln(1-y) - \frac{1}{4} \ln^2 y - \zeta_2,$$

$$D_m(\rho) = Li_2(-y) + \frac{1}{4} \ln^2 y + \frac{1}{2} \zeta_2, \quad (7)$$

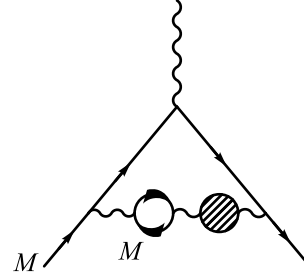


Рис.1. Вычитаемая диаграмма Фейнмана

$$\begin{aligned}
T(\rho) = & -6Li_3(y) - 3Li_3(-y) + \ln^2 y \ln(1-y) + \\
& + \frac{1}{2}(\ln^2 y + 6\zeta_2) \ln(1+y) + 2 \ln y (Li_2(-y) + 2Li_2(y)),
\end{aligned}$$

$$Li_2(y) = -\int_0^y \frac{dx}{x} \ln(1-x), \quad Li_3(y) = \int_0^y \frac{dx}{x} Li_2(x),$$

новым ядром:

$$\bar{K}^{(2)}(s) = K^{(2a)}(s) - K^{(2b)}(s) \Big|_{m_f=M}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
K^{(2b)}(s)_{m_f=M} = & 2 \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + \rho(1-x)} \Pi(1, x), \\
\Pi(1, x) = & -\frac{8}{9} + \frac{b^3}{3} - b \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{6}\right) \ln \frac{b-1}{b+1}, \quad (9) \\
b = & \frac{2-x}{x}.
\end{aligned}$$

Величина  $K^{(2b)}(s)_{m_f=M}$  может быть представлена в аналитическом виде:

$$\begin{aligned}
K^{(2b)}(s)_{m_f=M} = & \frac{2}{\rho} \times \\
& \times \left[ \frac{8}{9}\rho^2 + \frac{35}{36}\rho - \frac{4}{3}\zeta_2 - \frac{1}{\Delta} [L_- P_1(x_-) - L_+ P_1(x_+)] - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\Delta} [Li_- P_2(x_-) - Li_+ P_2(x_+)] \right], \quad (10)
\end{aligned}$$

где  $x_\pm = (\rho \pm \Delta)/2$ ,  $\Delta = \sqrt{\rho(\rho-4)}$  и

$$\begin{aligned}
L_\pm = & \ln \frac{x_\pm}{x_\pm - 1}, \quad Li_\pm = Li_2(1 - x_\mp), \\
P_1(z) = & -\frac{5}{9}z^4 - \frac{4}{3}z^3 + \frac{4}{3}z^2, \quad (11) \\
P_2(z) = & \frac{1}{3}z^4 - 2z^2 + \frac{4}{3}z.
\end{aligned}$$

Приведем несколько первых слагаемых ряда по  $\rho^{-1}$  для этой величины:

$$\begin{aligned} \bar{K}^{(2)}(s) = & 2\frac{1}{\rho}\left[\bar{a}_1 + \bar{b}_1 L + \right. \\ & + \frac{1}{\rho}(\bar{a}_2 + \bar{b}_2 L + \bar{c}_2 L^2) + \frac{1}{\rho^2}(\bar{a}_3 + \bar{b}_3 L + \bar{c}_3 L^2) + \\ & \left. + \frac{1}{\rho^3}(\bar{a}_4 + \bar{b}_4 L + \bar{c}_4 L^2)\right] + O(\rho^{-5}), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{50}{27} - \frac{2}{3}\zeta_2, & \bar{b}_1 &= -\frac{23}{36}, \\ \bar{a}_2 &= \frac{9241}{1152} - \frac{103}{24}\zeta_2, & \bar{b}_2 &= -\frac{487}{216}, & \bar{c}_2 &= \frac{43}{144}, \\ \bar{a}_3 &= \frac{15256601}{432000} - \frac{803}{40}\zeta_2, & \bar{b}_3 &= -\frac{29279}{3600}, & \bar{c}_3 &= \frac{221}{80}, \\ \bar{a}_4 &= \frac{66452261}{432000} - \frac{10829}{120}\zeta_2, & \bar{b}_4 &= -\frac{57917}{1800}, & \bar{c}_4 &= \frac{3763}{240}. \end{aligned} \quad (13)$$

Наш окончательный результат для адронного вклада в  $a_\mu^{\text{hadr}}$  имеет вид

$$a_\mu^{\text{hadr}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds}{s} R_{\text{exp}}^h(s) \left[ K^{(1)}(s) + \frac{\alpha}{\pi} \bar{K}^{(2)}(s) \right], \quad (14)$$

где  $R_{\text{exp}}^h(s) = \sigma_{\text{exp}}^{e^+e^- \rightarrow \text{hadr}}(s) / \sigma_{\text{exp}}^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(s)$  и  $\bar{K}^{(2)}(s)$  дано выше (см. (8), (12)).

**Дискуссия.** Предложенный здесь метод не включает вкладов от диаграмм Фейнмана с двумя виртуальными фотонами, в каждой из которых имеется вставка поляризационного оператора – в одну адронную, в другую – лептонную (см. рис.2). Неопределенность теоретической формулы, представленной выше, связанная с этим фактом, может

быть оценена как  $a_\mu^{\text{hadr}} (1 + O((\alpha/\pi)^2 \ln M^2/m_e^2)) \sim \sim a_\mu^{\text{hadr}} (1 + O(10^{-4}))$ . Эта величина меньше достижимых в настоящее время точностей опыта.

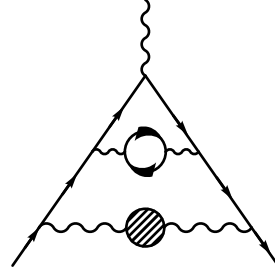


Рис.2. Типичный вклад с двумя фотонами с вставками поляризаций вакуума: лептонной и адронной вставки в разные фотонные линии

Мы выражаем свою благодарность Е. Солодову, С. Эйдельману, Б. Хазину и другим участникам семинара Института ядерной физики имени Будкера (Новосибирск). Эта работа была поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 03-02-17-077.

1. A. Nyffeler, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **131**, 162 (2004).
2. A. Czarnecki and W. J. Marciano, Phys. Rev. D **64**, 013014 (2001) [arXiv:hep-ph/0102122].
3. B. Krause, Phys. Lett. B **390**, 392 (1997) [arXiv:hep-ph/9607259].
4. Г. В. Федотович, Е. Солодов, Частное сообщение.
5. R. Barbieri and E. Remiddi, Nucl. Phys. B **90**, 233 (1975).
6. B. Lautrup and E. De Rafael, Nucl. Phys. B **70**, 317 (1974) [Erratum-ibid. B **78**, 576 (1974)].