Письма в ЖЭТФ, том 83, вып. 10, с. 539 – 542 © 2006 г. 25 мая

Последовательности импульсов для реализации квантового преобразования Фурье на многоуровневых системах

В. Е. Зобов, А. С. Ермилов

Институт физики им. Л.В. Киренского Сибирского отд. РАН

Поступила в редакцию 10 апреля 2006 г.

На основании формализма виртуальных спинов найдены последовательности селективных импульсов радиочастотного магнитного поля для реализации квантового преобразования Фурье методами ядерного магнитного резонанса на системах с 4, 6 и 8 неэквидистантными уровнями. При использовании лазерных импульсов результаты могут быть применены к другим квантовым системам.

PACS: 03.67.Lx

До настоящего времени основное внимание в области квантовых вычислений сосредоточено на кубитах – физических системах, обладающих двумя стационарными состояниями [1], например, ядерных спинах $I = 1/2$. В качестве достижений приведем реализацию методами ядерного магнитного резонанса (ЯМР) алгоритма факторизации Шора на 7 кубитах [2] и получение эффективно чистого состояния на 12 кубитах [3]. Одна из причин достигнутых успехов в том, что квантовые алгоритмы в двоичной логике наиболее разработаны [1]. Однако значительно чаще в природе встречаются квантовые системы с большим числом состояний: квадрупольные ядра со спином $I > 1/2$, ионы, радикалы или молекулярные магнетики с многоуровневыми электронными состояниями, спиновые кластеры с сильным спин-спиновым взаимодействием и т.д. Многие авторы считают, что использование таких d-уровневых систем (кудитов) в квантовых вычислениях будет более выгодным. Хотя уже установлено, что любое унитарное преобразование над кудитами может быть представлено в виде элементарных логических операторов (вентилей), но конкретные схемы основных алгоритмов, пригодные для их физической реализации, не получены. В том числе это относится и к квантовому преобразованию Фурье (КПФ), которое играет ключевую роль во многих квантовых алгоритмах. КПФ осуществляется действием на d-мерный вектор состояния матрицей Уолша–Адамара [1, 4]

$$QFT_d = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{d-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(d-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{d-1} & \omega^{2(d-1)} & \dots & \omega^{(d-1)^2} \end{pmatrix},$$

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{d}\right). \qquad (1)$$

Экспериментальная реализация вентилей осуществляется, как правило, с помощью импульсов радиочастотного (РЧ) магнитного поля в ЯМР или лазерных импульсов в оптике [1]. В случае квантовых систем с неэквидистантными уровнями действию каждого из таких импульсов соответствует матрица вращения двух состояний системы, разница энергий которых совпадает с частотой импульса. В работе [5] найдена последовательность лазерных импульсов для реализации матрицы (1) КПФ на кутритах ($d = 3$). В работе [4] дана Jarlskog's параметризация QFT_d для $d = 3$, $d = 4$ и $d = 5$, но последовательность импульсов не была получена. Более того, сложность формул привела авторов к выводу о нереальности кудит-теории при $d > 5$. В работе [6] описана общая процедура представления произвольной унитарной матрицы размером $d \times d$ в виде произведения матриц селективных поворотов. Однако необходимость вычисления большого числа таких матриц (около d^2) делает процедуру довольно трудоемкой. В настоящей работе мы покажем, что при работе с многоуровневыми системами можно воспользоваться результатами, уже полученными на многоспиновых системах, если применить формализм виртуальных спинов, предложенный Кесселем с соавторами [7 – 9]. Наш подход позволяет находить для операторов QFT_d представления в виде последовательностей операторов поворотов селективными РЧ импульсами для больших $d = (2I_1 + 1)(2I_2 + 1)\dots(2I_n + 1)$, где $I_1, I_2 \dots I_n$ – виртуальные спины.

Для системы из n кубитов сеть квантовых вентилей для КПФ на $N = 2^n$ состояниях хорошо известна

$[1,2,10]$ (действие операторов осуществляется слева направо):

$$QFT_N = H_1 B_{1,2} H_2 B_{1,3} B_{2,3} H_3 \dots H_{n-1} B_{1,n} B_{2,n} \dots$$

$$\dots B_{n-2,n} B_{n-1,n} H_n, \tag{2}$$

где H_i – оператор Адамара, действующий на спин (кубит) i; $B_{ij} = B_{ij}(\theta)$ – оператор контролируемого сдвига фазы на угол $\theta = \pi/2^{i-j}$. В матричном виде:

$$H_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; B_{ij}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Используем последовательную нумерацию уровней (состояний), начиная с основного: $1, 2, \dots, m, \dots, N$. Соответствующие состояния спинов (реальных или виртуальных) определяются двоичным представлением числа $m-1$ для уровня m, например, $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ – для двух кубитов четырехуровневой системы. После применения сети (2), подразумевающей прямое (тензорное) произведение действующих на разные спины матриц (3), получается состояние побитно обратное к истинному, полученному после применения оператора (1). Для приведения результата к соответствующему виду следует применить оператор перестановки состояний $SWAP$ [1].

В работе [10] показано, как реализовать сеть (2) для КПФ с помощью селективных РЧ импульсов, основываясь на формуле преобразования оператора $B_{ij}(\theta)$ (3) в оператор селективного поворота двух последних состояний:

$$H_j B_{ij}(\theta) H_j = \exp(i\theta/2) \{\theta\}^i_Z \{\theta\}^{r-s}_X. \tag{4}$$

Здесь и далее мы используем следующее обозначение: верхний индекс $r - s$ означает селективный импульс на переходе $r \to s$, поворачивающий на угол, указанный внутри скобок, тогда как верхний индекс i или i, j означает селективный импульс, действующий на соответствующий кубит или кубиты. Нижний индекс обозначает ось вращения X, Y или Z. В работе [10] приведены последовательности импульсов для двух кубитов:

$$\underset{1\,4\,7\,9}{\left\{\frac{\pi}{2}\right\}^{1,2}_{Y}} \to \underset{2\,5\,8\,10}{\left\{\pi\right\}^{1,2}_{X}} \to \underset{10}{\left\{\frac{\pi}{2}\right\}^{3-4}_{X}} \to \underset{3\,6}{\left\{\frac{\pi}{4}\right\}^{1}_{Z}} \to$$

$$\to \underset{11\,12\,13}{SWAP(2 \leftrightarrow 3)} \tag{5}$$

и для трех кубитов:

$$\underset{\substack{1\,4\,7\,10\,13\,16\,19 \\ 22\,25\,27\,29\,31}}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}^{1,2,3}_{Y}} \to \underset{\substack{2\,5\,8\,11\,14\,17\,20 \\ 23\,26\,28\,30\,32}}{\left\{\pi\right\}^{1,2,3}_{X}} \to \underset{23}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}^{6-8}_{X}} \to$$

$$\to \underset{20}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}^{5-7}_{X}} \to \underset{32}{\left\{\frac{3}{4}\pi\right\}^{7-8}_{X}} \to \underset{30}{\left\{\frac{1}{4}\pi\right\}^{5-6}_{X}} \to \underset{28}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}^{3-4}_{X}} \to$$

$$\to \underset{3\,6\,9\,12}{\left\{\frac{3}{8}\pi\right\}^{1}_{Z}} \to \underset{15\,18\,21\,24}{\left\{\frac{1}{4}\pi\right\}^{2}_{Z}} \to \underset{33\,34\,35\,36}{SWAP(2 \leftrightarrow 5,\; 4 \leftrightarrow 7)} \tag{6}$$

Пользуясь симметрией последовательности (2), мы переставили операторы Адамара по сравнению с оригинальной работой. Стрелки между импульсами указывают направление времени. Под каждым импульсом в формулах (5) и (6) перечислены номера селективных РЧ импульсов, использованных нами далее при получении данного оператора.

Квантовая сеть для КПФ на $N = d^n$ состояниях системы из n кудитов с одинаковым числом уровней рассмотрена в работе [11]. Ее отличие от сети (2) на кубитах заключается в замене операторов H_i на операторы QFT_d, а $B_{ij}(\theta)$ – на оператор контролируемого сдвига фазы с диагональной матрицей в пространстве состояний двух кудитов [5, 11, 12] размерности d^2 с элементами:

$$\langle km | P_{ij}(d, d, \theta) | km \rangle = \exp(ikm\theta),$$

$$k, m = 0, 1, 2 \dots (d-1), \quad \theta = 2\pi/d^{j-i+1}. \tag{7}$$

Для перенесения последовательности импульсов на многоуровневую систему следует реальным кубитам или кудитам поставить в соответствие виртуальные. Начнем со случая $d = 2^n$. Операторы селективных импульсов из формул (5) и (6) переносятся непосредственно. Для операторов Адамара, записанных через действующие на отдельные спины импульсы, и операторов $SWAP$, не приведенных авторами [10], мы подобрали аналоги из селективных импульсов. Таким образом, для QFT_4 мы нашли последовательность из 13 импульсов:

$$\left(\underset{1}{\left\{\frac{\pi}{2}\right\}_{Y}} \to \underset{2}{\left\{\pi\right\}_{X}} \to \underset{3}{\left\{\frac{\pi}{4}\right\}_{Z}} \right)^{1-3} \to$$

$$\to \left(\underset{4}{\left\{\frac{\pi}{2}\right\}_{Y}} \to \underset{5}{\left\{\pi\right\}_{X}} \to \underset{6}{\left\{\frac{\pi}{4}\right\}_{Z}} \right)^{2-4} \to$$

$$\to \left(\underset{7}{\left\{\frac{\pi}{2}\right\}_Y} \to \underset{8}{\left\{\pi\right\}_X}\right)^{1-2} \to$$

$$\to \left(\underset{9}{\left\{\frac{\pi}{2}\right\}_Y} \to \underset{10}{\left\{\frac{3}{2}\pi\right\}_X}\right)^{3-4} \to$$

$$\to \underset{11}{\left\{\pi\right\}_X^{2-3}} \to \underset{12}{\left\{\frac{\pi}{2}\right\}_Z^{1-2}} \to \underset{13}{\left\{\frac{7}{2}\pi\right\}_Z^{3-4}},$$

а для QFT_8 – последовательность из 36 импульсов:

$$\left(\underset{1}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{2}{\left\{\pi\right\}_X} \to \underset{3}{\left\{\frac{3}{8}\pi\right\}_Z}\right)^{1-5} \to$$

$$\to \left(\underset{4}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{5}{\left\{\pi\right\}_X} \to \underset{6}{\left\{\frac{3}{8}\pi\right\}_Z}\right)^{2-6} \to$$

$$\to \left(\underset{7}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{8}{\left\{\pi\right\}_X} \to \underset{9}{\left\{\frac{3}{8}\pi\right\}_Z}\right)^{3-7} \to$$

$$\to \left(\underset{10}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{11}{\left\{\pi\right\}_X} \to \underset{12}{\left\{\frac{3}{8}\pi\right\}_Z}\right)^{4-8} \to$$

$$\to \left(\underset{13}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{14}{\left\{\pi\right\}_X} \to \underset{15}{\left\{\frac{1}{4}\pi\right\}_Z}\right)^{1-3} \to$$

$$\to \left(\underset{16}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{17}{\left\{\pi\right\}_X} \to \underset{18}{\left\{\frac{1}{4}\pi\right\}_Z}\right)^{2-4} \to$$

$$\to \left(\underset{19}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{20}{\left\{\frac{3}{2}\pi\right\}_X} \to \underset{21}{\left\{\frac{1}{4}\pi\right\}_Z}\right)^{5-7} \to$$

$$\to \left(\underset{22}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{23}{\left\{\frac{3}{2}\pi\right\}_X} \to \underset{24}{\left\{\frac{1}{4}\pi\right\}_Z}\right)^{6-8} \to$$

$$\to \left(\underset{25}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{26}{\left\{\pi\right\}_X}\right)^{1-2} \to$$

$$\to \left(\underset{27}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{28}{\left\{\frac{3}{2}\pi\right\}_X}\right)^{3-4} \to$$

$$\to \left(\underset{29}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{30}{\left\{\frac{5}{4}\pi\right\}_X}\right)^{5-6} \to$$

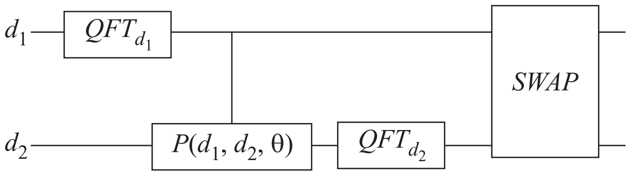
$$\to \left(\underset{31}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{32}{\left\{\frac{7}{4}\pi\right\}_X}\right)^{7-8} \to$$

$$\to \left(\underset{33}{\left\{2\pi\right\}_Z} \to \underset{34}{\left\{\pi\right\}_Y}\right)^{2-5} \to$$

$$\to \underset{35}{\left\{2\pi\right\}_Z^{4-5}} \to \underset{36}{\left\{3\pi\right\}_Y^{4-7}}.$$

Отметим, что получающиеся матрицы отличаются от (1) фазовыми множителями $\exp\left(i \cdot \dfrac{11 \cdot \pi}{8}\right)$ и $\exp\left(i \cdot \dfrac{29 \cdot \pi}{16}\right)$, соответственно для $d = 4$ и $d = 8$.

Перейдем к случаю $N \neq 2^n$ и возьмем простейшую шестиуровневую систему. Для нахождения QFT_6 представим эту систему состоящей из виртуальных кутрита ($d_1 = 3$) и кубита ($d_2 = 2$) с состояниями: $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$, $|20\rangle$, $|21\rangle$. Обобщим приведенные выше схемы КПФ на случай двух разных кудитов:



(8)

где теперь в матрице (7) $k = 0, 1, 2 \dots (d_1 - 1)$, $m = 0, 1, 2 \dots (d_2 - 1)$ и $\theta = 2\pi/d_1 d_2$. Руководствуясь схемой (8), для QFT_6 мы получили последовательность из 33 селективных импульсов:

$$\left(\underset{1}{\left\{\frac{2}{3}\pi\right\}_Z} \to \underset{2}{\left\{\frac{3}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{3}{\left\{\frac{4}{3}\pi\right\}_Z}\right)^{3-5} \to$$

$$\left(\underset{4}{\left\{\frac{13}{6}\pi\right\}_Z} \to \underset{5}{\left\{2\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}_X} \to \underset{6}{\left\{\frac{11}{6}\pi\right\}_Z}\right)^{1-3} \to$$

$$\to \left(\underset{7}{\left\{\frac{4}{3}\pi\right\}_Z} \to \underset{8}{\left\{\frac{3}{2}\pi\right\}_X} \to \underset{9}{\left\{\frac{2}{3}\pi\right\}_Z}\right)^{1-5} \to$$

$$\to \underset{10}{\left\{\pi\right\}_Z^{1-3}} \to \underset{11}{\left\{\frac{2}{3}\pi\right\}_Z^{3-5}} \to$$

$$\to \left(\underset{12}{\left\{\frac{2}{3}\pi\right\}_Z} \to \underset{13}{\left\{\frac{3}{2}\pi\right\}_Y} \to \underset{14}{\left\{\frac{4}{3}\pi\right\}_Z} \right)^{4-6} \to$$

$$\left(\underset{15}{\left\{\frac{13}{6}\pi\right\}_Z} \to \underset{16}{\left\{2\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right\}_X} \to \underset{17}{\left\{\frac{11}{6}\pi\right\}_Z} \right)^{2-4} \to$$

$$\to \left(\underset{18}{\left\{\frac{4}{3}\pi\right\}_Z} \to \underset{19}{\left\{\frac{3}{2}\pi\right\}_X} \to \underset{20}{\left\{\frac{2}{3}\pi\right\}_Z} \right)^{2-6} \to$$

$$\to \underset{21}{\left\{\pi\right\}_Z^{2-4}} \to \underset{22}{\left\{\frac{2}{3}\pi\right\}_Z^{4-6}} \to \underset{23}{\left\{\pi\right\}_Z^{1-2}} \to$$

$$\to \underset{24}{\left\{\pi\right\}_Z^{3-5}} \to \underset{25}{\left\{2\pi\right\}_Z^{1-3}} \to \underset{26}{\left\{\frac{7}{3}\pi\right\}_Z^{4-6}} \to \underset{27}{\left\{\frac{7}{2}\pi\right\}_Y^{1-2}} \to$$

$$\to \left(\underset{28}{\left\{3\pi\right\}_X} \to \underset{29}{\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}_Y} \right)^{3-4} \to \underset{30}{\left\{\frac{3}{2}\pi\right\}_Y^{5-6}} \to$$

$$\to \underset{31}{\left\{\pi\right\}_X^{2-5}} \to \underset{32}{\left\{\pi\right\}_X^{2-3}} \to \underset{33}{\left\{\pi\right\}_X^{4-5}} .$$

Встречающиеся в схемах импульсы с вращением вокруг оси z на практике осуществляют в виде составного z-импульса [10]: $\{\theta\}_Z^{r-s} \equiv \{-\pi/2\}_X^{r-s} \to \{\theta\}_Y^{r-s} \to \{\pi/2\}_X^{r-s}$. Существуют и другие способы: например, с помощью сдвига фазы последующих импульсов [2] или с помощью двух сдвинутых по фазе π-импульсов $\{\pi\}_Y^{r-s} \to \{\pi\}_{Y+\pi+\theta/2}^{r-s}$ [13]. Также с помощью нескольких последовательных импульсов могут быть реализованы селективные импульсы на "запрещенных" переходах с $\Delta m > 1$, как это обсуждается, например, в работе [9]. Заметим, что приведенные последовательности импульсов не являются единственно возможными.

Приведенные выше выражения показывают, что при переходе от импульсов, действующих на реальные спины, к импульсам, действующим на отдельные переходы в многоуровневой системе, возросло число операций. Это находится в полном соответствии с общей теорией квантовых вычислений [14], согласно которой принципиальные преимущества квантовых алгоритмов проявляются на системах из многих квантовых объектов. Частично можно улучшить ситуацию, используя возможность параллельного действия на несвязанные уровни [15].

В заключение отметим, что полученные нами результаты важны и для других квантовых алгоритмов, поскольку операторы QFT_d входят в основной двухкудитный вентиль – "SUM gate" [12], являющийся обобщением основного двухкубитного вентиля CNOT:

$$(E_1 \otimes (QFT_{d2})^{-1}) P(d_1, d_2, 2\pi/d_2)(E_1 \otimes QFT_{d2}), \quad (9)$$

где E_1 – единичная матрица в пространстве состояний первого, контрольного, кудита. Обратим внимание, что в (9), в отличие от (8), оба оператора QFT_d действуют на второй, рабочий, кудит, и угол имеет другое значение.

Наконец, найденные в настоящей работе последовательности после замены в них РЧ импульсов на лазерные импульсы [1, 5, 6] окажутся полезными при реализации КПФ на ионах или атомах в ловушках и на других многоуровневых квантовых системах.

---

1. К. А. Валиев, А. А. Кокин, *Квантовые компьютеры: надежды и реальность*, Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
2. L. M. K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta et al., Nature **414**, 883 (2001).
3. J.-S. Lee and A. K. Khitrin, J. Chem. Phys. **122**, 041101 (2005).
4. K. Fujii, K. Funahashi, and T. Kobayashi, quant-ph/0508006.
5. A. B. Klimov, R. Guzman, J. C. Retamal, and C. Saavedra, Phys. Rev. A **67**, 062313 (2003).
6. G. K. Brennen, D. P. O'Leary, and S. S. Bullock, Phys. Rev. A **71**, 052318 (2005).
7. А. Р. Кессель, В. Л. Ермаков, Письма в ЖЭТФ **70**, 59 (1999); **71**, 443 (2000).
8. А. Р. Кессель, В. Л. Ермаков, ЖЭТФ **117**, 3 (2000).
9. A. R. Kessel and N. M. Yakovleva, quant-ph/0206106.
10. K. Dorai and D. Suter, quant-ph/0211030.
11. A. Muthukrishnan and C. R. Stroud, Jr., quant-ph/0112017.
12. J. Daboul, X. Wang, B. C. Sanders, J. Phys. A **36**, 7063 (2003).
13. T. Gopinath and A. Kumar, Phys. Rev. A **73**, 022326 (2006).
14. Д. Бауместер, А. Экерт, А. Цайлингер, *Физика квантовой информации*, гл. 4, М.: Постмаркет, 2002 (*The Physics of Quantum Information*, Eds. D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000).
15. D. P. O'Leary, G. K. Brennen, S. S. Bullock, quant-ph/0603081.