

# Статистические свойства спектров квантовых графов

Ю. Дабагян<sup>1)</sup>

*Department of Physiology, Keck Center for Integrative Neuroscience, University of California, San Francisco, California 94143-0444, USA*

Поступила в редакцию 10 апреля 2006 г.

Обсуждается общий аналитический подход к статистическому описанию спектров квантовых графов на основе точных разложений значений квантовых уровней в ряды по периодическим орбитам. Обсуждаются точные и приближенные выражения для функций распределения вероятности, полученные на основе метода спектральной иерархии [5], а также механизм возникновения универсальных статистических свойств спектральных флуктуаций квантово-хаотических систем с точки зрения квазиклассической теории периодических орбит.

PACS: 03.65.Sq, 05.45.+b

**I. Введение.** Квантовый граф представляет собой систему из квантовой частицы, движущейся вдоль ребер произвольного конечного графа  $G$  [1]. В классическом пределе эта система порождает простую стохастическую динамику, задаваемую поступательным движением вдоль ребер графа и стохастическим рассеянием на его вершинах, с заранее определенными вероятностями рассеяния. Такая динамика имеет много общих черт с динамикой обычных хаотических систем [2]. Например, периодические траектории в такой системе изолированы и их количество экспоненциально возрастает с периодом. В то же время, в ряде работ [1] было численно установлено, что статистическое поведение различных спектральных характеристик достаточно сложных квантовых графов, например, распределение вероятностей расстояний между ближайшими уровнями импульса,  $s_n = k_n - k_{n-1}$ , хорошо соответствует предсказаниям теории случайных матриц (ТСМ) [3, 4], как это обычно имеет место для классически неинтегрируемых систем. При этом оказывается, что большое количество задач, связанных как с классической, так и с квантовой динамикой на графе, допускает точные решения, что делает эти системы удобными моделями в контексте аналитической теории “квантового хаоса”. Например [1], для них существуют точные разложения квантовой плотности состояний по классическим периодическим орбитам (формула Гутцвиллера) и аналогичное разложение для спектральной лестницы,

$$N(k) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \Theta(k - k_j) = \bar{N}(k) + \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_p A_p e^{iL_p^0 k}, \quad (1)$$

в котором  $\bar{N}(k)$  обозначает среднее число уровней на интервале  $[0, k]$ ,  $L_p^0$  – оптическую длину периодической траектории с индексом  $p$ , а  $A_p$  – некий весовой множитель, задаваемый явно в терминах коэффициентов рассеяния на вершинах графа.

Важно обратить внимание, что наличие явных разложений глобальных характеристик вида (1) неэквивалентно окончательному решению спектральной задачи, подразумевающему наличие локальной информации об отдельных уровнях в виде явной зависимости  $k_n = k(n)$ . В работах [5] был предложен вариант явного нахождения величин  $k_n$ , использующий конечную систему из  $r + 2$  вспомогательных “разделительных” последовательностей,  $\hat{k}_n^{(0)}, \hat{k}_{n+1}^{(1)}, \dots, \hat{k}_n^{(r+1)}$ , первой из которых является физическая спектральная последовательность  $k_n = \hat{k}_n^{(0)}$ , а последняя задана в виде глобально определенной явной функции от  $n$ ,

$$\hat{k}_n^{(r+1)} = \frac{\pi}{L_0} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2)$$

Ключевым свойством этих последовательностей является выполнение условий “сплетения”,

$$\hat{k}_n^{(j)} < \hat{k}_n^{(j-1)} < \hat{k}_{n+1}^{(j)}, \quad (3)$$

гарантирующих, что между каждыми двумя ближайшими точками  $\hat{k}_n^{(j)}$  и  $\hat{k}_{n+1}^{(j)}$  существует ровно одна точка  $\hat{k}_n^{(j-1)}$  (см. рис. 1).

В [5] было также указано, что в силу определенных аналитических свойств спектрального детерминанта,  $\Delta(k) = 1 + \sum_i a_i e^{ikL^{(i)}}$ , где  $L^{(i)}$  – различные алгебраические комбинации длин ребер,  $l_1, l_2, \dots, \dots, l_{N_B}$ , в качестве  $\hat{k}_n^{(j)}$  можно выбрать последовательность нулей  $j$ -й производной функции  $\Delta(k)$  [5, 8]. При этом величина  $r$ , отражающая степень нерегу-

<sup>1)</sup>e-mail: yura@phy.ucsf.edu

лярности спектра, определяется как минимальное положительное число, для которого выполнено условие  $\sum_i |a_i (L_{(i)}/L_0)^r| < 1$  [5]. В простейшем случае регулярных графов, когда  $r = 0$  [6, 7], необходима только одна вспомогательная последовательность (2) и различные спектральные характеристики можно находить по формуле

$$f(k_n) = \int_{\bar{k}_n^{(1)}}^{\hat{k}_n^{(1)}} f(k) \rho(k) dk. \quad (4)$$

Как указано в [6, 5], такой случай соответствует ситуации, когда вейлевское среднее,  $\bar{N}(k)$ , представляющее собой прямую с наклоном  $L_0/\pi$ , является “сквозным” для физической спектральной лестницы  $N(k)$ , то есть  $\bar{N}(k)$  пересекает каждую ступеньку  $N(k)$  в точках  $\bar{k}_n^{(1)}$ .

**II. Статистические свойства спектров регулярных графов.** Используя формулу Гутцвиллера в (4), можно получить явные разложения для различных спектральных характеристик  $f_n^{(0)}$ , например, для флуктуаций собственных значений  $k_n$  вокруг вейлевского среднего,  $\delta_n^{(0)} = (L_0/\pi)(k_n - \bar{k}_n)$ , или расстояний между уровнями  $s_{n,m} = k_{n+m} - k_n$ . Такие разложения имеют вид [6, 7]

$$f_n^{(0)} = \bar{f}^{(0)} - \sum_p C_p^{(0)} \cos(\omega_p^{(0)} n + \varphi_p^{(0)}), \quad (5)$$

где частоты  $\omega_p^{(0)}$  определяются длинами периодических орбит,  $\omega_p^{(0)} = \pi L_p^{(0)}/L_0$ . В то время как первый член разложения (5) определяет среднее значение величины  $f_n^{(0)}$ , последующая сумма описывает флуктуации вокруг среднего. Каждая из частот  $\omega_p^{(0)}$  представляет собой целочисленную комбинацию  $\omega_p^{(0)} = m_{p,1}^{(0)} \Omega_1 + m_{p,2}^{(0)} \Omega_2 + \dots + m_{p,N_B}^{(0)} \Omega_{N_B}$ , где величины  $\Omega_i$  выражаются через длины отдельных ребер графа,  $\Omega_i = l_i/L_0$ , а коэффициенты  $m_{p,i}^{(0)}$  указывают, сколько раз данная орбита проходит вдоль ребра  $l_i$ . Сумма  $|m_p^{(0)}| = m_{p,1}^{(0)} + m_{p,2}^{(0)} + \dots + m_{p,N_B-1}^{(0)}$  определяет полное количество рассеяний на вершинах, претерпеваемое частицей при движении вдоль траектории  $p$ . Если в (5) включаются только те орбиты, для которых  $|m_p^{(0)}| < m$ , то результатом будет  $m$ -е приближение к точному значению  $f_n^{(0)}$  [1, 6].

Поскольку числа  $\Omega_i$  удовлетворяют условию  $\Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_{N_B} = 1$ , только  $N_B - 1$  из них являются независимыми. Выражая одно из них, например  $\Omega_{N_B}$ , через остальные, рассмотрим случай, когда числа  $\bar{\Omega}_i = \Omega_i - \Omega_{N_B}$  являются иррациональными и алгебраически независимыми (случай общего

положения). Назовем орбиту  $p$  алгебраически простой (с обозначением  $p'$ ), если целые коэффициенты  $\tilde{m}_{p,i}^{(0)} = m_{p,i}^{(0)} - m_{p,N_B}^{(0)}$  не имеют общих делителей. Такие орбиты, вообще говоря, отличны от динамически простых орбит, соответствующих однократному прохождению вдоль некоторой последовательности ребер при движении частицы по графу [1, 2, 6–8].

Разложение (5) позволяет немедленно перейти к статистическому описанию последовательности  $f_n^{(0)}$ . Действительно, хорошо известно, что последовательность остатков  $x_n = [\alpha n]_{\text{mod } 1}$  для любого иррационального числа  $\alpha$  и  $n = 1, 2, \dots$  распределена равномерно на интервале  $[0, 1]$  [14]. Поскольку аргументы тригонометрических функций ряда (5) определены по модулю  $2\pi$ , то перебор значений  $f_n^{(0)}$  выдает последовательность, статистически эквивалентную ряду

$$f_x^{(0)} = \bar{f}^{(0)} - \sum_p \tilde{C}_p^{(0)} \sin(\tilde{m}_p^{(0)} x + \varphi_p^{(0)}), \quad (6)$$

в котором  $\tilde{C}_p^{(0)}$  и  $\tilde{m}_p^{(0)}$  соответствуют коэффициентам в (5) с учетом условия  $\sum_i \Omega_i = 1$ , а  $x$  – набор из  $N_B - 1$  независимых равномерно распределенных случайных величин. Распределения значений  $\delta f_x^{(0)}$  в таком случае получается из выражения  $P_f^{(0)} = \langle \delta(f^{(0)} - f_x^{(0)}) \rangle$ :

$$P_f^{(0)} = \int dk e^{ik(f^{(0)} - \bar{f}^{(0)})} \int_0^{2\pi} \prod_p \Lambda_p(x) \frac{dx}{2\pi}, \quad (7)$$

где каждый из множителей

$$\Lambda_p(x) = \exp\left\{ik \tilde{C}_p^{(0)} \cos(\tilde{m}_p^{(0)} x + \varphi_p^{(0)})\right\}$$

определяет вклад в интеграл от соответствующей периодической орбиты  $p$ . Таким образом, (7) задает точное выражение для распределения  $P_f^{(0)}$  в терминах теории периодических орбит.

Важно отметить, что свойства асимптотических распределений тригонометрических сумм вида (6) являются одним из традиционных предметов исследований математической статистики (см., например, [9, 10] и указанные там ссылки). В частности, известно, что отдельные члены (или группы членов) лакунарных тригонометрических рядов вида (6) могут рассматриваться как слабо зависимые случайные величины, для которых справедливо обобщение центральной предельной теоремы, в силу которой их сумма асимптотически распределена по Гауссу,

$$P_f^{(0)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\delta f^{(0)} - \langle f^{(0)} \rangle)^2}{2\sigma^2}}, \quad (8)$$

со статистическим отклонением

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_p \tilde{C}_p^{(0)2} = \left\langle \left( \delta f_x^{(0)} \right)^2 \right\rangle. \quad (9)$$

Заключение о гауссовской форме распределения флуктуаций оказывается применимым и для большинства случаев разложений спектральных характеристик регулярных квантовых графов (и других скейлинговых систем), описываемых рядами вида (6) с постоянными коэффициентами.

Предположение о Гауссовском характере распределения флуктуаций спектральной лестницы,  $\delta N(k) = N(k) - \bar{N}(k)$ , подтвержденное численными исследованиями, было ранее высказано в [11] в качестве универсальной “центральной предельной теоремы для спектральных флуктуаций”, распространяющейся на общие квантово-хаотические системы. При наличии дополнительных явных разложений (5) эту гипотезу, подтвержденную указанной выше связью с теорией слабо зависимых случайных величин (тригонометрических рядов), можно перенести на значительно более широкий набор спектральных характеристик.

**III. Приближенное описание функций распределения.** Утверждение о том, что вклады отдельных орбит в ряд  $\delta f_x^{(0)}$  ведут себя как зависимые случайные величины, позволяет произвести некоторые физические упрощения в выражении (7). Разлагая экспоненты  $\Lambda_p(\mathbf{x})$ , можно заметить, что поскольку разложение (5) происходит по взаимно ортогональным гармоникам, большинство интегралов от перекрестных членов, возникающих из произведения разложений  $\Lambda_p(\mathbf{x})$  в (7), исчезает. Вклад вносят только “резонансные” члены, для которых сводится к нулю одна из алгебраических сумм частот. Амплитуда таких вкладов быстро убывает в порядках малости соответствующих степеней  $C_p^{(0)}$ , пропорциональных произведению соответствующего числа коэффициентов рассеяния на вершинах графа [6, 7].

Можно воспользоваться этими рассуждениями для того, чтобы упростить интеграл для  $P_f^{(0)}$ . Например, в качестве простого приближения можно пренебречь вкладами резонансов между разными алгебраически простыми орбитами. Такое пренебрежение эквивалентно “расплетанию” множителей  $\Lambda_{p'}(x)$ , соответствующих различным алгебраически простым орбитам, то есть введению независимого набора переменных  $x_{p'}$  для каждой из алгебраически простых орбит. Вероятность распределения в таком случае запишется в виде

$$P_f^{(0)} = \int dk e^{ik(f^{(0)} - \bar{f}^{(0)})} \prod_{p'} Q_{p'} \left( k \tilde{C}_{p'}^{(0)} \right), \quad (10)$$

где каждый множитель,

$$Q_{p'} = \int_0^{2\pi} e^{ik \sum_{\nu} \tilde{C}_{p'\nu}^{(0)} \cos(\nu \tilde{m}_{p'} x_{p'} + \varphi_p)} dx_{p'}, \quad (11)$$

соответствует алгебраически простой периодической орбите  $p'$ , и сумма по  $\nu$  в (11) берется по орбитам с индексами, кратными  $\tilde{m}_{p'}$ .

Для более грубого описания профиля распределения вероятности можно пренебречь резонансами между любыми несовпадающими орбитами, что эквивалентно введению независимой фазы  $x_p$  для каждой из орбит. В таком предположении интеграл в (7) разделяется на независимые интегралы, что приводит к простому выражению

$$P_f^{(0)} = \int dk e^{ik(f^{(0)} - \bar{f}^{(0)})} \prod_p J_0 \left( k \tilde{C}_p^{(0)} \right), \quad (12)$$

где  $J_0(x)$  – нулевая функция Бесселя.

Распределения вида (12) встречаются в теории коммуникаций, например при анализе интенсивности интенфирующих телекоммуникационных каналов, теории распространений волн в случайных средах и других областях, где используются модели случайных сигналов [12, 13].

Заметим также, что в приближении независимых случайных вкладов выполняются условия теоремы Линдберга–Феллера и центральной предельной теоремы, устанавливающих закон нормального распределения для суммы независимых случайных величин. Для спектральных разложений (6) эти условия на величину статистических отклонений отдельных вкладов,  $\sigma_p^2 = \left( \tilde{C}_p^{(0)} \right)^2 / 2$ , выполняются в силу экспоненциального возрастания числа периодических орбит и равномерного экспоненциального убывания коэффициентов  $\tilde{C}_p^{(0)}$ . В результате, в приближении независимых случайных вкладов распределение (12) имеет тот же гауссовский вид (8), со статистическим отклонением  $\sigma^2 = \sum_p \tilde{C}_p^{(0)2} / 2 < \infty$ , что и предсказанное в [9, 10] и [11] для случая слабо зависимых отклонений.

Подобным образом можно описать статистические свойства различных спектральных величин регулярных графов, начиная с их гармонических разложений [6–8]. Примером могут служить флуктуации уровней вокруг среднего значения,  $\delta_n^{(0)} =$

$= (L_0/\pi) (k_n - \bar{k}_n)$ , имеющие вид (5) с  $\bar{\delta}^{(0)} = 0$ ,  $\varphi_p^{(0)} = -\pi/2$ , и с коэффициентами

$$C_p^{(0)} = -\frac{2}{\pi} \frac{A_p^{(0)}}{\omega_p} \sin\left(\frac{\omega_p}{2}\right), \quad (13)$$

или для величины разности значений  $s_{m,n}^{(0)} = k_{n+m} - k_n$ , с  $\bar{s}_{m,n}^{(0)} = \pi m/L_0$ ,  $\varphi_p^{(0)} = \omega_p m/2$  и с коэффициентами

$$D_{p,m}^{(0)} = \frac{4}{L_0} \frac{A_p^{(0)}}{\omega_p} \sin\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_p m}{2}\right). \quad (14)$$

Знание распределений этих величин в свою очередь позволяет находить описание более сложных объектов, например, корреляционной функции флуктуаций  $\langle \delta_n^{(0)} \delta_{n+m}^{(0)} \rangle$ , автокорреляционной функции  $R_2(x)$  или формфактора  $K_2(\tau)$ :

$$K_2 = \frac{\pi}{L_0} \sum_m \langle e^{-is_{mn}\tau} \rangle = \frac{\pi}{L_0} \sum_m e^{-i\frac{\pi m}{L_0}\tau} F_{s_m}^{(0)}(k), \quad (15)$$

где  $F_{s_m}^{(0)}(k)$  – характеристическая функция распределений вида (7), (10) или (12), получаемых из разложения (5) для  $s_{m,n}$  с коэффициентами (14), и, таким образом,

$$R_2(x) = \frac{\pi}{L_0} \sum_{m=1}^{\infty} P_{s_m}^{(0)}(x). \quad (16)$$

Подчеркнем, что все распределения, полученные выше, представляют собой замкнутые выражения, последовательно описывающие спектральные характеристики в терминах теории периодических орбит.

**IV. Спектральная иерархия.** Как было отмечено выше, в общем случае квантовые графы не являются регулярными и получение спектральных разложений вида (5) напрямую для них, вообще говоря, неприменимо. Обобщить описанное выше решение на случай нерегулярных систем можно, установив связь между двумя соседними системами разделителей,  $\hat{k}_n^{(j)}$  и  $\hat{k}_n^{(j-1)}$ , применяя соотношение (4) к  $f(k) = k$  на  $j-1$ -м уровне иерархии,

$$\hat{k}_n^{(j-1)} = \int_{\hat{k}_{n-1}^{(j)}}^{\hat{k}_n^{(j)}} kdN^{(j-1)}. \quad (17)$$

Здесь величина  $N^{(j)}(k)$  соответствует “спектральной лестнице” последовательности  $\hat{k}_n^{(j)}$ . Сплетение последовательностей  $\hat{k}_n^{(j-1)}$  с  $\hat{k}_n^{(j)}$  (или  $N^{(j-1)}(k)$  с  $N^{(j)}(k)$ , см. рис.1) означает, что  $N^{(j-1)}(\hat{k}_n^{(j)}) = n$ . Подстав-

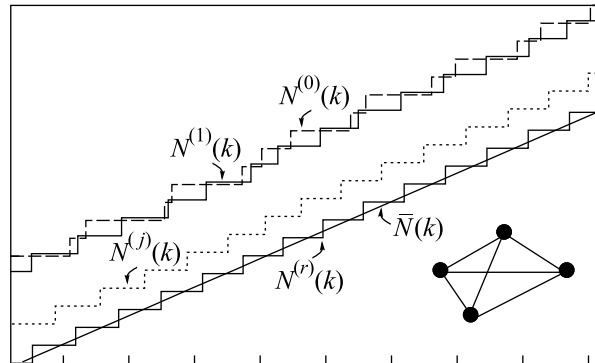


Рис.1. Сплетение спектральных лестниц для разделительных последовательностей  $\hat{k}_n^{(j)}$  полностью связанного 4-вершинного графа с  $r = 7$ . Графики  $N^{(j)}(k)$  вертикально смещены для ясности иллюстрации. Видно, что физическая спектральная лестница  $N^{(0)}(k)$  переплетена лестницей  $N^{(1)}(k)$  и т.д. Последняя лестница  $N^{(r)}(k)$  пересечена насквозь вейлевским средним  $\bar{N}(k)$

ля разложение (1) для  $N^{(j-1)}(\hat{k}_n^{(j)})$  в (17) и используя  $\hat{k}_n^{(j)}$  в виде

$$\hat{k}_n^{(j)} = \frac{\pi}{L_0} (n + \delta_n^{(j)}), \quad (18)$$

получим для осциллирующей части  $\hat{k}_n^{(j-1)}$

$$\delta_n^{(j-1)} = f_\delta^{(j-1)} - \sum_p C_p^{(j-1)} \sin\left(\omega_p^{(j-1)} n + \varphi_p^{(j-1)}\right), \quad (19)$$

где нулевой член

$$f_\delta^{(j-1)} = \frac{1}{2} (\delta_n^{(j)} - \delta_{n-1}^{(j)}) - \frac{1}{2} ((\delta_n^{(j)})^2 - (\delta_{n-1}^{(j)})^2), \quad (20)$$

амплитуды

$$C_p^{(j-1)} = \frac{2}{L_0} \frac{A_p^{(j-1)}}{\omega_p^{(j-1)}} \sin\left(\frac{\omega_p^{(j-1)}}{2}\right) (\delta_n^{(j)} - \delta_{n-1}^{(j)} + 1) \quad (21)$$

и фазы  $\varphi_p^{(j-1)} = \omega_p^{(j-1)} (\delta_n^{(j)} + \delta_{n-1}^{(j)} - 1)/2$  для каждого уровня  $j$  являются функциями флуктуаций  $\delta_n^{(j)}$ ,  $\delta_{n-1}^{(j)}$  на предыдущем уровне иерархии.

Аналогичные разложения легко получаются для других спектральных величин, например для  $s_{n,m}^{(j-1)} = \hat{k}_{n+m}^{(j-1)} - \hat{k}_n^{(j-1)}$ :

$$s_{n,m}^{(j-1)} = f_s + \frac{2}{L_0} \sum_p D_{p,m}^{(j-1)} \cos\left(\omega_p^{(j-1)}\right) \left(n - \frac{m}{2}\omega_p^{(j-1)}\right) \quad (22)$$

с нулевым членом

$$f_s^{(j-1)} = s_{n,m}^{(j)} + (s_{n,m}^{(j)} - s_{n,m-1}^{(j)}) \times \\ \times (\pi m/L_0 - (s_{n,m}^{(j)} + s_{n-1,m}^{(j)})/2) - \\ - \xi_n^{(j)} (s_{n,m}^{(j)} - s_{n-1,m}^{(j)}), \quad (23)$$

где  $\xi_n^{(j)} = (\delta_n^{(j)} + \delta_{n-1}^{(j)})/2$ , и коэффициентами разложения  $\tilde{D}_{p,m}^{(j-1)}$ , получающимися из соответствующего разложения для  $s_{n,m}^{(j)}$ . Уравнения, связывающие соседние, последовательности можно также рассматривать как описание перехода  $j$ -й последовательности  $f_n^{(j)}$  с одного уровня иерархии на другой.

**V. Статистическое описание спектральной иерархии.** Как и в случае регулярных графов, описание стохастических свойств последовательностей типа  $\delta_n^{(j)}$  или  $s_{n,m}^{(j)}$  основывается на наблюдении, что перебор значений индексов  $n$  в аргументах гармонических функций (19) и (22) приводит к появлению случайных величин  $x$ . Идея нахождения функций распределения для различных спектральных величин состоит в использовании структурной связи между разделительными последовательностями, установленными выше, для связывания распределений  $P_f^{(j)}$  на разных уровнях иерархии. Начиная с распределения  $P_f^{(r)}$  на регулярном уровне, можно последовательно найти распределение  $P_f^{(r-1)}$  на следующем уровне и так далее, заканчивая последним, физическим уровнем. Рассмотрим, для примера, поведение последовательностей  $\delta_n^{(j)}$ . Будем для простоты рассматривать флуктуации  $\delta_n^{(j)}$  и  $\delta_{n-1}^{(j)}$  в выражении (19) как независимые случайные величины  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , распределенные по  $P_\delta^{(j)}$ . Соответственно, для плотности  $P_\delta^{(j-1)}(\delta)$  можно написать

$$P_\delta^{(j-1)} = \int \delta(\delta - \delta_x^{(j-1)}) P_{\delta_1}^{(j)} P_{\delta_2}^{(j)} d\delta_1 d\delta_2 dx. \quad (24)$$

Используя (19) и экспоненцируя дельта-функционал, получаем

$$P_\delta^{(j-1)}(\delta) = \int dk e^{ik\delta} \left\langle \prod_p \Lambda_p^{(j-1)}(x, \delta_1, \delta_2) dx \right\rangle_{\Omega^{(j-1)}}, \quad (25)$$

где множители  $\Lambda_p^{(j)}(x, \delta_1, \delta_2)$  соответствуют членам разложения (19), в которых теперь явно присутствует зависимость от флуктуаций на предыдущих уровнях иерархии, а скобки  $\langle * \rangle_{\Omega^{(j)}}$  обозначают усреднение по ним с весом

$$\Omega^{(j-1)}(\delta_1, \delta_2, k) = e^{-ik f_\delta^{(j-1)}(\delta_1, \delta_2)} P_\delta^{(j)}(\delta_1) P_\delta^{(j)}(\delta_2). \quad (26)$$

Выражение (25) обобщает регулярные выражения (7), (10), (12) для одноуровневой иерархии на аналогичные общие выражения для  $j > 0$ , усредненные по беспорядку предыдущих уровней. Заметим, что аргументацию разд. II о гауссовской форме распределения [9, 10] можно непосредственно перенести на распределение значений  $\delta_x^{(r)}$  на регулярном уровне. Однако, как показано на рис.2, распределение  $\delta_x^{(j)}$  на

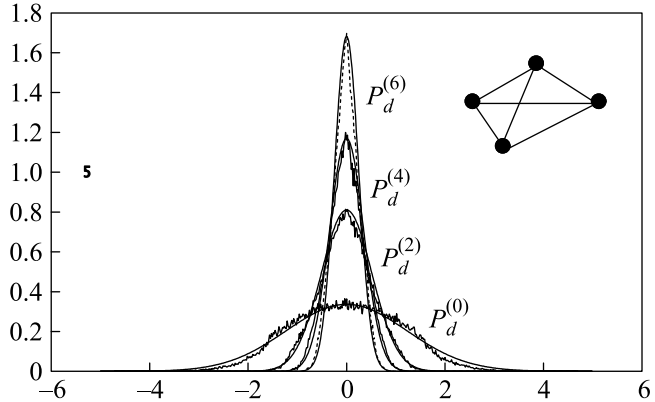


Рис.2. Распределение величин статистических отклонений на четных уровнях спектральной иерархии 4-вершинного графа с  $r = 7$ . Сплошные линии представляют собой гауссовские аппроксимации к численно полученным гистограммам

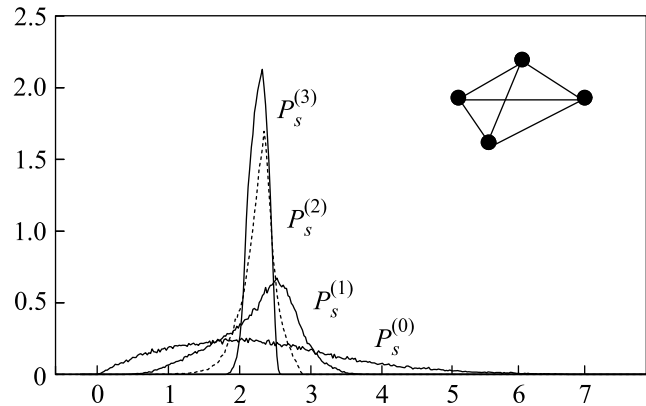


Рис.3. Развитие распределений вероятности для расстояний между ближайшими соседями,  $s_n^{(j)} = \hat{k}_n^{(j)} - \hat{k}_{n-1}^{(j)}$ ,  $r = 3$ . Максимальное расстояние между ближайшими соседями на уровне  $j = 0$  в этом случае  $s_{\max} = 8.68$ , при размере регулярной ячейки  $\pi/S_0 = 2.28$

высших уровнях  $j > 0$  также является гауссовским. Для других спектральных величин, например для  $s_n^{(j)}$  (см. рис.3), последовательность переходов вида (25) может приводить к асимметричным (негауссовским) распределениям.

**В. Обсуждение.** Идея решения спектральной задачи, предложенного в [5], состоит в выявлении структурной связи между последовательностью физических уровней  $k_n$  и регулярной последовательностью  $\hat{k}_n^{(r+1)}$ , заданной в виде явной функции  $\hat{k}_n^{(r+1)} = \hat{k}^{(r+1)}(n)$ . В случае квантовых графов в качестве регулярной последовательности используется (2) и связь с  $k_n$  устанавливается через систему вспомогательных последовательностей  $\hat{k}_n^{(j)}$ , сплетающих  $k_n$  с  $\hat{k}^{(r+1)}(n)$ . Получаемая таким образом спектральная иерархия состоит из системы последовательностей  $\hat{k}_n^{(j)}$  и уравнений перехода (17) от  $\hat{k}_n^{(j)}$  к  $\hat{k}_n^{(j-1)}$ .

Такой подход позволяет не только описать эволюцию базовых последовательностей  $\hat{k}_n^{(j)}$  от низших уровней иерархии к высшим, но и дать полное вероятностное описание спектральных характеристик в рамках теории периодических орбит, включая те из них, которые не описываются напрямую формулой Гутцвиллера. При этом оказывается возможным проследить развитие масштабов спектральных флуктуаций, распределяя беспорядок по промежуточным уровням иерархии, переходя постепенно от менее разупорядоченных последовательностей к более разупорядоченным. В то время как базовая последовательность максимально упорядочена, амплитуда флуктуаций в каждой последующей последовательности  $\hat{k}_n^{(j)}$  нарастает по мере убывания индекса  $j$ , то есть по мере приближения к физическому спектру [5]. Минимальное число вспомогательных последовательностей  $\hat{k}_n^{(j)}$ , необходимых для сплетения  $\hat{k}_n^{(r+1)}$  с  $\hat{k}_n^{(0)}$ , выражает сложность спектральной задачи по отношению к данному методу сплетения.

Указанная выше связь свойств членов рядов разложений (19) со свойствами слабо зависимых случайных величин [9, 10] позволяет также уяснить физическое происхождение универсальности распределений различных спектральных характеристик, следующих из предельных свойств сумм таких величин. Поскольку известно, что статистические свойства спектров достаточно сложных квантовых графов хорошо описываются распределениями ТСМ, то можно заключить, что наличие достаточного количества переходов между уровнями иерархии нерегулярных систем и соответственно усреднений по случайным фазам и разупорядоченным последовательностям  $\hat{k}_n^{(j)}$  в (25) приводят к появлению не только гауссовской

формы распределения вероятностей  $P_f^{(0)}$  (как, например, для  $\delta N(k)$  и, соответственно,  $\delta_n^{(0)}$ , см. [11] и рис.2), но и к возникновению более сложных (например, вигнеровских, см. [3] и рис.3) распределений.

Важно также, что нахождение вероятностей флуктуаций в виде (25) позволяет проследить не только возникновение общих, универсальных статистических закономерностей, но также и сколь угодно детально описывать специфические черты распределений  $P_f^{(j)}$ , отражающие индивидуальные свойства той или иной системы.

Работа выполнена при частичной поддержке Sloan Swartz Foundation.

1. T. Kottos and U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. **79**, 4794 (1997), Annals of Physics **274**, 76 (1999).
2. F. Barra and P. Gaspard, Phys. Rev. E **63**, 066215 (2001).
3. O. Bohigas, M.-J. Giannoni, and C. Schmidt, Phys. Rev. Lett. **52**, 1 (1984).
4. Г. М. Заславский, УФН **129**, 211 (1979), ЖЭТФ **65**, 643 (1973).
5. Y. Dabaghian and R. Blümel Phys. Rev. E **68**, 055201(R) (2003), JETP Letters **77**, 530 (2003), Phys. Rev. E **70**, 046206 (2004).
6. Y. Dabaghian, R. V. Jensen, and R. Blümel, Письма в ЖЭТФ **74**, 258 (2001), ЖЭТФ **121**, 1399 (2002).
7. R. Blümel, Y. Dabaghian, and R. V. Jensen, Phys. Rev. Lett. **88**, 044101 (2002); Phys. Rev. E **65**, 046222 (2002).
8. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Москва, ГИТТЛ, 1956.
9. Yu. V. Prokhorov and V. A. Statulevicius (Eds.), *Limit Theorems of Probability Theory*, Springer, Berlin, 2000.
10. P. Revesz (Ed.), *Limit theorems in Probability and Statistics*, Colloquia Mathematica S. 11, Keszthely, Hungary, 1974. Amsterdam: North-Holland, 1975.
11. R. Aurich, J. Bolte, and F. Steiner, Phys. Rev. Lett. **73**, 1356 (1994).
12. *Статистическая теория связи и ее практическое применение*, под редакцией Б. Р. Левина, М.: "Связь", 1979.
13. M. Pätzold, *Mobile Fading Channels: Modelling, Analysis, & Simulation*, John Wiley & Sons, 2002.
14. А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, М.: Наука, 1983.