

Релаксация осцилляций бозе-конденсата в мезоскопической системе при $T = 0$

Ю. Каган¹⁾, Л. А. Максимов

Российский научный центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 ноября 2003 г.

Представлена общая система нелинейных уравнений, описывающая недиссипативную эволюцию колеблющегося бозе-конденсата. Рассматривается релаксация поперечных осцилляций конденсата в ловушке цилиндрической симметрии. Эволюция происходит благодаря параметрическому резонансу, связывающему поперечную моду с продольными. Нелинейное перераспределение в подсистеме дискретных продольных мод приводит к подавлению обратного возврата энергии, порождая недиссипативную немонотонную релаксацию поперечных колебаний конденсата.

PACS: 03.75.Lm, 05.30.Jp

Обнаружение бозе-конденсации в ультра-холодных газах открыло уникальную возможность исследования эволюции когерентных свойств макроскопической системы, изолированной от окружения. Один из наиболее интересных аспектов здесь связан с выявлением и анализом природы затухания когерентных осцилляций конденсата. До последнего времени теоретическое и экспериментальное изучение этой проблемы было связано, фактически, с рассмотрением затухания при конечной температуре T (см. подробную библиографию в [1]). В этом случае ансамбль нормальных возбуждений эффективно играет роль внутреннего термостата. Взаимодействие с тепловыми возбуждениями приводит к затуханию осцилляций конденсата с передачей энергии в подсистему нормальных возбуждений.

Особый интерес в этой проблеме представляет вопрос о внутреннем механизме затухания при $T = 0$. В работе авторов [2] было показано существование такого механизма на примере рассмотрения затухания радиальных когерентных колебаний конденсата цилиндрической симметрии, находящегося в поперечном параболическом потенциале. Было найдено, что затухание возникает в результате своеобразного параметрического резонанса, приводящего к переносу энергии в подсистему продольных мод. Сам параметрический резонанс обусловлен осцилляциями скорости звука, вызванными поперечными колебаниями конденсата. Следует подчеркнуть, что полученные в [2] результаты могут быть использованы только для описания начального периода затухания. В изолированной системе конечных размеров с дискретной системой энергетических уровней для описания затуха-

ния при больших временах необходимо дополнительно знать временную эволюцию в подсистеме продольных мод и учитывать изменение параметрического резонанса с падением амплитуды поперечных осцилляций. В этом существенное отличие от стандартной картины параметрического резонанса. Выбор в геометрии системы был предопределен тем, что, как было строго установлено в [3] (см. также [4]), при произвольном изменении частоты двумерного параболического потенциала круговой симметрии и произвольном значении параметров, двумерные осцилляции не затухают.

Недавно парижская группа [1] опубликовала результаты экспериментального исследования затухания поперечных колебаний конденсата как целого (дышащая мода, ДМ) в вытянутой ловушке с азимутальной симметрией при предельно низкой температуре (40 нК). При малой величине амплитуды ДМ авторы наблюдали рекордно медленное затухание. При большем значении начальной амплитуды ДМ картина затухания радикально изменилась. Теперь после падения на ограниченном интервале времени началась обратная перекачка энергии с ростом амплитуды ДМ. Только через заметный промежуток времени восстанавливался нормальный ход затухания.

Теоретический анализ с объяснением аномальной картины затухания был дан в [5]. Выяснилось, что определяющим является учет нелинейной связи между поперечной и продольными модами. При этом, однако, фактически феноменологически учитывалась релаксация продольных возбуждений.

На самом деле при дискретном энергетическом спектре, характерном для замкнутой мезоскопической системы, необратимое затухание не возникает.

¹⁾e-mail: kagan@kurm.polyn.kiae.su

Речь может идти только о нестационарном перераспределении энергии в подсистеме продольных мод.

В настоящей работе получена полная система нелинейных уравнений, описывающая временную эволюцию колеблющегося конденсата в отсутствие необратимых каналов диссипации. Исходным является уравнение Гросса–Питаевского. Рассматривается конденсат цилиндрической симметрии в поперечном параболическом потенциале с продольным размером $2L \gg R$, где R – статический радиус конденсата. Анализ решения демонстрирует существенную зависимость затухания радиальных осцилляций от характера эволюции продольных колебаний. Перераспределение энергии, передаваемой в эту подсистему, приводит к хаотической нестационарной картине заполнения дискретных уровней и одновременно к существенному погашению амплитуд активных продольных мод, непосредственно возбуждаемых в результате параметрического резонанса. Эффективно это погашение эквивалентно релаксации, но происходит в отсутствие реальной диссипации.

Динамику бозе-конденсата в разреженном газе при $T = 0$ будем рассматривать в рамках нелинейного уравнения Гросса–Питаевского для конденсатной волновой функции Ψ :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}, t) + U_0 \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi^2(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

Здесь $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$ – вершина локального взаимодействия частиц, a – длина рассеяния. Предполагается, что система замкнутая и в процессе эволюции число частиц N и полная энергия E сохраняются. При этом мы ограничимся случаем отталкивания между частицами ($a > 0$). Представим волновую функцию в форме

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{i\Phi(\mathbf{r}, t)}.$$

Мнимая часть уравнения (1) дает непосредственно уравнение непрерывности конденсата

$$\frac{\partial n_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla[(n_0(\mathbf{r}) + n_1(\mathbf{r}, t))\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \Phi(\mathbf{r}, t).$$

В (2) мы ввели явно зависящую от времени часть плотности $n_1(\mathbf{r}, t)$, представив полную плотность в форме $n(\mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{r}) + n_1(\mathbf{r}, t)$.

Действительная часть уравнения (1) приводит к уравнению для фазы

$$-\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Phi)^2 + U_0 n + V(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n}. \quad (3)$$

Везде ниже рассматривается газ достаточно высокой плотности, при которой корреляционная длина $\xi = 1/\sqrt{mn_0 U_0}$ мала по сравнению со всеми размерами системы. В рассматриваемые процессы оказываются вовлеченными только длинноволновые возбуждения конденсата с длинами волн, большими по сравнению с ξ . В этих условиях, отвечающих приближению Томаса–Ферми, последним членом в (3) можно пренебречь (см., например, [6]). В стационарном случае, когда $\mathbf{v} = 0$, фаза конденсатной волновой функции имеет известное значение $\Phi_0 = -\mu_0 t/\hbar$, где μ_0 – химический потенциал. Тогда из уравнения (3) следует

$$n_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{U_0} (\mu_0 - V(\mathbf{r})). \quad (4)$$

Сохраняя обозначение Φ только для фазы, связанной с динамикой конденсата, имеем

$$-\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Phi)^2 + U_0 n_1. \quad (5)$$

Система нелинейных уравнений (2), (5) описывает не только возбуждения квантовой жидкости, но и их взаимодействие. Мы будем учитывать это взаимодействие строго, не прибегая к теории возмущений. Заметим, что внешний потенциал входит в уравнения (2), (5) только опосредованно через статическое распределение плотности (4).

В линейном приближении система уравнений (2), (5) сводится к уравнению гармонических колебаний

$$\partial^2 n_1 / \partial t^2 = c_0^2 \nabla (f_0 \nabla n_1).$$

Здесь

$$f_0(\mathbf{r}) = \frac{n_0(\mathbf{r})}{n_{00}}, \quad n_{00} = n_0(0), \quad c_0^2 = \frac{U_0 n_{00}}{m} = \frac{\mu_0}{m}. \quad (6)$$

Введем полную ортонормированную систему собственных функций гармонической задачи $\{\chi_s(\mathbf{r})\}$, являющихся решением уравнения

$$\Omega_k^2 \chi_s(\mathbf{r}) + c_0^2 \nabla (f_0(\mathbf{r}) \nabla \chi_s(\mathbf{r})) = 0. \quad (7)$$

Разложим функции n_1 и Φ по полной системе собственных функций $\chi_s(\mathbf{r})$:

$$n_1(t, \mathbf{r}) = \sum_s c_s(t) \chi_s(\mathbf{r}), \quad \Phi = \sum_s a_s(t) \chi_s(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Подставляя эти разложения в уравнения (2), (5), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} c_s - \frac{\hbar \Omega_s^2}{U_0} a_s &= \frac{\hbar}{m} \sum_{s_1 s_2} c_{s_1} a_{s_2} \langle \chi_{s_1} (\nabla \chi_s^*) (\nabla \chi_{s_2}) \rangle, \\ \frac{\partial}{\partial t} a_p + \frac{U_0}{\hbar} c_p &= -\frac{\hbar}{2m} \sum_{s_1 s_2} a_{s_1} a_{s_2} \langle \chi_s^* (\nabla \chi_{s_1}) (\nabla \chi_{s_2}) \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\langle \dots \rangle = \int d^3 r \dots$. В правой части первого уравнения мы воспользовались преобразованием

$$\langle \chi_s^* \nabla (\chi_{s_1} (\nabla \chi_{s_2})) \rangle = -\langle \chi_{s_1} (\nabla \chi_s^*) (\nabla \chi_{s_2}) \rangle.$$

Введем новые переменные

$$a_s = \left(\frac{U_0}{\hbar \Omega_s} \right)^{1/2} (y_s + y_s^*), \quad c_s = i \left(\frac{\hbar \Omega_s}{U_0} \right)^{1/2} (y_s - y_s^*).$$

Для мод, описываемых действительными собственными функциями χ_s , коэффициенты a_s , b_s действительны, и $y_{-s} \equiv y_s$.

В этих переменных уравнения (9) могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y_s + i \Omega_s y_s &= \sum_{s_1 s_2} M_{s s_1 s_2} (y_{s_1} - y_{s_1}^*) (y_{s_2} + y_{s_2}^*) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{s_1 s_2} K_{s s_1 s_2} (y_{s_1} + y_{s_1}^*) (y_{s_2} + y_{s_2}^*). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_{s s_1 s_2} &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar U_0 \Omega_{s_1}}{\Omega_s \Omega_{s_2}} \right)^{1/2} \langle (\nabla \chi_s^*) \chi_{s_1} (\nabla \chi_{s_2}) \rangle, \\ K_{s s_1 s_2} &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar U_0 \Omega_s}{\Omega_{s_1} \Omega_{s_2}} \right)^{1/2} \langle \chi_s^* (\nabla \chi_{s_1}) (\nabla \chi_{s_2}) \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть в начальный момент времени возбуждено только поперечное колебание конденсата как целого с сохранением цилиндрической симметрии (“дышащая мода”, ниже индекс \perp). Система уравнений (10) может быть представлена в этом случае в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y_{\perp} + i \Omega_{\perp} y_{\perp} &= \sum_k M_{\perp k -k} (y_k y_{-k} - y_k^* y_{-k}^*) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_k K_{\perp k -k} (y_k + y_k^*) (y_{-k} + y_{-k}^*), \\ \frac{\partial}{\partial t} y_k + i \Omega_k y_k &= -2M_{k k \perp} y_{\perp}^* (y_{\perp} + y_{\perp}^*) + \\ &+ K_{\perp k -k} (y_{\perp} - y_{\perp}^*) (y_k + y_k^*) + I_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Во втором уравнении мы использовали равенства $M_{k \perp k} = K_{\perp k -k}$, $K_{k k \perp} = M_{k k \perp}$. Последний член в правой части определяет эволюцию в продольной подсистеме возбуждений

$$\begin{aligned} I_k &= \sum_{k_1 k_2} M_{k k_1 k_2} (y_{k_1} - y_{k_1}^*) (y_{k_2} + y_{k_2}^*) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k_1 k_2} K_{k k_1 k_2} (y_{k_1} + y_{k_1}^*) (y_{k_2} + y_{k_2}^*). \end{aligned} \quad (13)$$

Собственная функция дышащей моды находится как решение уравнения (7) с учетом того, что в приближении Томаса–Ферми $f_0 = 1 - r^2/R^2$, где $R^2 = 2c_0^2/\omega_{\perp}^2$, ω_{\perp} – частота параболической ловушки,

$$\chi_{\perp} = \sqrt{\frac{3}{V}} \left(1 - \frac{2r^2}{R^2} \right), \quad \Omega_{\perp} = 2\omega_{\perp}, \quad (14)$$

k определяет значение волнового вектора продольных возбуждений, пробегающего дискретные значения в силу конечности размера системы в z -направлении. Следуя работе [7], легко найти собственные функции и собственные значения для длинноволновых продольных мод:

$$\begin{aligned} \chi_k &= \sqrt{\frac{1}{V}} e^{ikz} \left[1 - \frac{(kR)^2}{16} \left(1 - \frac{2r^2}{R^2} \right) \right], \\ \Omega_k &= \bar{c}k \left(1 - \frac{(kR)^2}{96} \right), \quad \bar{c} = \frac{c_0}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя (14), (15), можно непосредственно вычислить матричные элементы (11), фигурирующие в (12):

$$\begin{aligned} M_{\perp k -k} &= M_{k k \perp} = -\eta \frac{\sqrt{6}}{4} \left(\frac{\Omega_k}{\omega_{\perp}} \right)^2, \\ K_{\perp k -k} &= -\eta \frac{5\sqrt{6}}{24} \left(\frac{\Omega_k}{\omega_{\perp}} \right)^3, \quad \eta = \omega_{\perp} \left(\frac{\hbar \omega_{\perp}}{V n_{00} \mu_0} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (16)$$

и в (13):

$$\begin{aligned} M_{k k_1 k_2} &= \eta \left(\frac{\Omega_k \Omega_{k_1} \Omega_{k_2}}{\omega_{\perp}^3} \right)^{1/2} \text{sign}(k k_2) \delta_{k, k_1 + k_2}, \\ K_{k k_1 k_2} &= -\eta \left(\frac{\Omega_k \Omega_{k_1} \Omega_{k_2}}{\omega_{\perp}^3} \right)^{1/2} \text{sign}(k_1 k_2) \delta_{k, k_1 + k_2} \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения (12), (13) с матричными элементами (16), (17) полностью описывают релаксацию поперечных колебаний конденсата в мезоскопической системе в отсутствие диссипативных каналов эволюции.

Будем предполагать, что начальная амплитуда ДМ относительно мала, то есть $|\delta R/R|_0 \ll 1$. Это ограничивает масштаб нелинейного взаимодействия между модами. В то же время энергетический интервал, в котором лежат дискретные продольные моды, эффективно связанные с дышащей модой, оказывается малым по сравнению с ω_\perp . В этих условиях мы можем упростить систему уравнений, ограничиваясь квазирезонансным приближением. В рамках этого приближения в уравнениях (12), (13) мы можем удерживать только члены, для которых справедливо неравенство

$$\Delta\Omega = |\Omega_s \pm \Omega_{s_1} \pm \Omega_{s_2}| \ll \Omega_{s_i}. \quad (18)$$

Перепишем уравнения (12), (13) в этом приближении, введя вместо амплитуд y_s отношения $\bar{y}_s = y_s(t)/|y_\perp(0)|$. Начальная амплитуда ДМ $y_\perp(0)$ может быть найдена из сравнения колебательной энергии конденсата в начальный момент времени $E_{vib} = \frac{4}{3}\mu_0 N |\delta R/R|_0^2$ с энергией поперечной моды $2\hbar\Omega_\perp |y_\perp(0)|^2$. Отсюда

$$|y_\perp(0)| = \left(\frac{2\mu_0 N}{3\hbar\Omega_\perp} \right)^{1/2} \left| \frac{\delta R}{R} \right|_0.$$

С учетом этих обозначений уравнения (12), (13) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{y}_\perp + i\Omega_\perp \bar{y}_\perp &= -\alpha \sum'_{k>0} \bar{y}_k \bar{y}_{-k}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{y}_k + i\Omega_k \bar{y}_k &= \alpha \bar{y}_{-k}^* \bar{y}_\perp + \\ &+ \alpha' \sum_{k>k_1>0} \left(\frac{\Omega_k \Omega_{k_1} \Omega_{k-k_1}}{\omega_\perp^3} \right)^{1/2} \bar{y}_{k_1} \bar{y}_{k-k_1} - \\ &- 2\alpha' \sum_{k_1>0} \left(\frac{\Omega_k \Omega_{k_1} \Omega_{k+k_1}}{\omega_\perp^3} \right)^{1/2} \bar{y}_{k_1}^* \bar{y}_{k+k_1}, \quad (k > 0). \end{aligned} \quad (19)$$

Штрих у суммы в первом уравнении означает, что суммирование идет только по "активным модам", взаимодействующим непосредственно с ДМ с учетом ограничения (18). Для продольных мод, не связанных непосредственно с поперечной модой, во втором уравнении (19) следует опустить в правой части первый член. В этих уравнениях

$$\begin{aligned} \alpha &= |(2M_{\perp k-k} - K_{\perp k-k})| |y_\perp(0)| \approx 0, 3\omega_\perp \left| \frac{\delta R}{R} \right|_0, \\ \alpha' &\approx 2\alpha. \end{aligned} \quad (20)$$

Примем, что в начальный момент времени для тривиально вырожденных состояний $\bar{y}_k(0) = \bar{y}_{-k}(0)$.

Из системы уравнений (19) следует, что при эволюции это равенство сохраняется. Для анализа удобно из комплексных переменных \bar{y}_s выделить быструю фазу и представить их в форме

$$\bar{y}_s = b_s(t) e^{-i(\Omega_s t + \varphi_s(t))},$$

где $b_s(t)$ и $\varphi_s(t)$ – действительные величины, сравнительно медленно меняющиеся со временем при $\alpha/\omega_\perp \ll 1$. Введем обозначение

$$\gamma_{kk_1k_2} = (\Omega_k - \Omega_{k_1} - \Omega_{k_2})t + (\varphi_k - \varphi_{k_1} - \varphi_{k_2}). \quad (21)$$

Отделяя действительные и мнимые части (19), находим

$$\frac{\partial}{\partial t} b_\perp = -\alpha \sum'_{k>0} b_k^2 \cos \gamma_{\perp k k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\perp = \alpha \sum'_{k>0} \frac{b_k^2}{b_\perp} \sin \gamma_{\perp k k}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} b_k &= \alpha b_k b_\perp \cos \gamma_{\perp k k} + I_k, \\ I_k &= \alpha' \sum_{k>k_1>0} \left(\frac{\Omega_k \Omega_{k_1} \Omega_{k-k_1}}{\omega_\perp^3} \right)^{1/2} b_{k_1} b_{k-k_1} \cos \gamma_{k k_1 k-k_1} \\ &- 2\alpha' \sum_{k_1>0} \left(\frac{\Omega_k \Omega_{k_1} \Omega_{k+k_1}}{\omega_\perp^3} \right)^{1/2} b_{k+k_1} b_{k_1} \cos \gamma_{k+k_1 k_1 k}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_k &= \alpha b_\perp \sin \gamma_{\perp k k} + I'_k, \\ I'_k &= \\ &= -\alpha' \sum_{k>k_1>0} \left(\frac{\Omega_k \Omega_{k_1} \Omega_{k-k_1}}{\omega_\perp^3} \right)^{1/2} \frac{b_{k_1} b_{k-k_1}}{b_k} \sin \gamma_{k k_1 k-k_1} \\ &- 2\alpha' \sum_{k_1>0} \left(\frac{\Omega_k \Omega_{k_1} \Omega_{k+k_1}}{\omega_\perp^3} \right)^{1/2} \frac{b_{k+k_1} b_{k_1}}{b_k} \sin \gamma_{k+k_1 k_1 k}. \end{aligned} \quad (24)$$

Анализ полученных уравнений позволяет получить сценарий релаксации поперечных колебаний конденсата. В начальный момент времени продольные моды не возбуждены и для них справедливо соотношение $b_k(0) \ll 1$, в то время как по определению $b_\perp(0) = 1$. Поэтому в начальный период времени правые части уравнения (22) и члены I_k, I'_k квадратичные по b_k , роли не играют, и эволюция, фактически, определяется первыми членами в правых частях уравнений (23), (24) с постоянным b_\perp . Совместное решение демонстрирует экспоненциальный рост $b_k(t)$ при условии

$$|\Delta\Omega| \equiv \left| \Omega_k - \frac{1}{2}\Omega_\perp \right| < \alpha. \quad (25)$$

В частности, при $|\Delta\Omega| = 0$, $\gamma_{\perp kk} \simeq 0$ и из уравнения (23) следует $b_k(t) = b_k(0) \exp(\alpha t)$. Эти результаты, включая требование конечности начальной амплитуды $b_k(0)$, являются типичным проявлением параметрического резонанса (ср. [2]). Экспоненциальный рост испытывают все продольные моды, попавшие в энергетический интервал порядка α (активные моды). При длине цилиндра $2L$ расстояние между уровнями равно $\delta\Omega = \pi\bar{c}/L$. Если $\delta\Omega < 2\alpha$, то по крайней мере одна мода попадает в этот интервал. Рост $b_k(t)$ приводит к тому, что после некоторой задержки начинает падать $b_{\perp}(t)$ и параллельно включается отток энергии на другие параллельные моды. При $L \gg R$ таких мод много, но дискретный характер энергетического спектра приводит к полному запрещению необратимых переходов. Однако нерегулярный характер амплитуд переходов типа $(\Omega_k \Omega_{k_1} \Omega_{k_2} / \omega_{\perp}^3)^{1/2} \cos \gamma_{k k_1 k_2}$ в (23), (24) в нелинейных членах I_k, I'_k приводит к хаотической эволюции в системе продольных мод. Следует полагать, что при этом должен быть существенно подавлен возврат на активные продольные уровни и заметная часть переданной энергии должна оставаться на неактивных модах.

Прямое численное решение системы уравнений (22)–(24) выявляет описанную картину. Пусть в энергетический интервал порядка α попадает только один уровень k_0 . Пренебрежем слабой дисперсией продольных мод (15). Тогда $\Omega_k \Omega_{k_1} \Omega_{k_2} / \omega_{\perp}^3 \cong \cong k k_1 k_2 / k_0$, и в выражении (21) для продольных мод можно опустить первый член. Введем безразмерное время $\tau = \alpha t$ и примем во внимание, что $\alpha'/\alpha = \text{const}$ (см.(20)). Тогда описываемая эволюция, фактически, зависит только от отношения $\xi = \Delta\Omega/\alpha$ и в слабой степени от k_0 при $k_0 L/\pi \gg 1$. (Заметим, что это справедливо не только в квазирезонансном приближении, но и для общей системы уравнений (12).) На рис.1 приведены зависимости $b_{\perp}^2(\tau) \equiv (\delta R(\tau)/\delta R(0))^2$ при разных значениях параметра ξ при фиксированном значении k_0 (в единицах π/L). При этом мы учитывали не только дискретные уровни, лежащие ниже активного уровня, но и продольные уровни выше k_0 , которые начинают заполняться на следующем этапе после распада состояний $\pm k_0$. Закон сохранения энергии, которому удовлетворяет система (22)–(24), в ходе эволюции приводит к слабой заселенности верхних уровней. При вычислениях мы ограничились одинаковым числом уровней выше и ниже Ω_{k_0} . При значении $\xi = 1, 2$ поперечные колебания вообще не затухают. Это наглядно видно и на рис.2, где для тех же значений параметра ξ построена зависимость заселенности $b_{k_0}^2$ уровня k_0 от τ . При выбран-

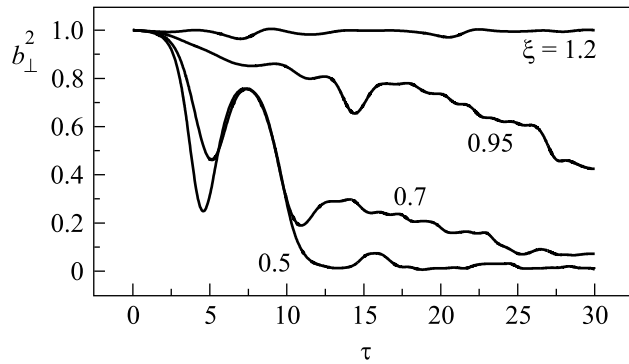


Рис.1. Зависимость заселенности дышащей моды от времени при фиксированном значении $k_0 = 10\pi/L$ для $\xi = 0.5, 0.7, 0.95$ и 1.2

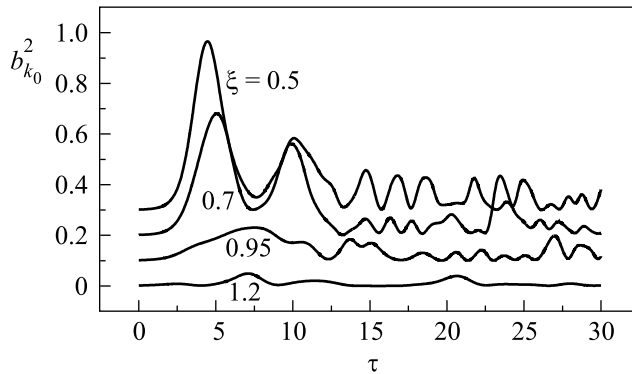


Рис.2. Зависимость заселенности активной моды k_0 от времени при тех же значениях ξ . Эти четыре графика сдвинуты друг относительно друга по вертикали на 0.1

ном значении ξ величина $b_{k_0}^2(\tau)$ остается близкой к нулю при всех τ . Утверждение, что при нарушении условий для возникновения параметрического резонанса (25) затухание колебаний при $T = 0$ должно вообще отсутствовать находит, таким образом, прямое подтверждение. Кривые, соответствующие $\xi = 0, 7$ и $0, 5$, наоборот, демонстрируют возникновение затухания, носящего нетривиальный характер (см.рис.1 и рис.2). Падение $b_{\perp}^2(\tau)$ и рост $b_{k_0}^2(\tau)$ сменяются обратной перекачкой энергии на ДМ и падением заселенности активной моды. Только позднее, когда заметным становится перераспределение энергии на другие продольные моды, возникает привычный монотонный ход релаксации. Энергия, как показывают прямые вычисления, “размазана” теперь по всем продольным модам, причем их заселенность испытывает хаотическую эволюцию. На этом этапе, несмотря на отсутствие необратимых переходов, характер интерференции, обусловленный разбросом динамических фаз, препятствует сколько-нибудь заметному росту амплитуды $b_{k_0}(\tau)$ и, тем самым, обратному оттоку

энергии на дышащую моду. Эволюция при этом выглядит как релаксация поперечного колебания конденсата при концентрации большей части энергии в подсистеме продольных мод.

Резко немонотонный характер затухания поперечной дышащей моды, аналогичный показанному на рис.1, экспериментально наблюдался в [1]. Большое значение $|\delta R/R|_0$ обеспечивало условие $\xi < 1$. Следует отметить, что полученные теоретические результаты в существенной степени универсальны. Поэтому выявленная картина эффективной релаксации с ее аномально немонотонным ходом носит при $T = 0$ общий характер.

Вместе с тем, количественное сравнение с экспериментальными результатами [1] затруднено, в первую очередь в силу конечности температуры. Хотя в эксперименте $T < \mu_0$, но $T > \hbar\omega_{\perp}$, и продольные уровни в начальный момент времени оказываются температурно заселенными. (Заметим, что при введении случайного разброса фаз φ_k в начальный момент времени качественная картина эволюции сохраняется, но меняется количественная картина). Наблюденное в [1] близкое к монотонному медленное затухание при значительно меньшем значении $|\delta R/R|_0$ имеет при $T = 0$ в изолированной системе аналог только при ξ , близком к единице (см. рис.1, кри-

вая при $\xi = 0.95$). Однако нельзя исключить, что такое затухание связано с диссипативными процессами, вызванными внешними факторами. При сравнительно большом значении отношения $|\delta R/R|_0$ эти процессы не могут играть роли на наиболее интересных этапах немонотонной релаксации.

Авторы признательны Д. Л. Коврижину за помощь в компьютерных вычислениях.

Настоящая работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, INTAS и NWO (Нидерланды).

-
1. F. Chevy, V. Bretin, P. Rosenusch et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 250402 (2002)
 2. Yu. Kagan and L. A. Maksimov, cond-mat/0212377v2, (2002).
 3. Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. **A54**, R1753 (1996).
 4. L. P. Pitaevskii and A. Rosch, Phys. Rev. **A55**, R853 (1997).
 5. Yu. Kagan and L. A. Maksimov, Phys. Rev. **A64**, 053610 (2001).
 6. Fr. Dalfovo, St. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
 7. E. Zaremba, Phys. Rev. **A57**, 518 (1998).