Письма в ЖЭТФ, том 78, вып. 11, с. 1257 – 1262 © 2003 г. 10 декабря

Обобщенное преобразование Дарбу в модели магнетика Ишимори на фоне спиральных структур

Е. Ш. Гутшабаш[1)]

Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета 198504 Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 21 августа 2003 г.

После переработки 29 октября 2003 г.

Предложена процедура интегрирования модели магнетика Ишимори, основанная на обобщенном преобразовании Дарбу. Построены точные решения модели на фоне спиральных структур. Выдвинута гипотеза о возможности в системе структурного фазового перехода.

PACS: 52.35.Sb

Хорошо известно, что в основе феноменологического подхода, предложенного Ландау и Лифшицем в теории ферромагнетизма, лежит идея о том, что в длинноволновом приближении эволюция слабо возбужденных состояний спиновой системы может быть описана в терминах вектора намагниченности (плотности магнитного момента) постоянной длины и характеризуется некоторым эффективным полем [1]. С учетом того, что наибольший вклад в процесс вносят обменные взаимодействия атомов кристалла, это дало возможность, в частности, в одномерном случае получить нелинейное уравнение (модель изотропного ферромагнетика Гейзенберга), которое впоследствии было решено с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [2, 3]: вычислены точные солитонные решения, описан спектр возбуждений модели и бесконечный набор законов сохранения. Дальнейший прогресс в этом направлении был достигнут в работе [4], в которой было предъявлено лаксово представление (и, тем самым, доказана принадлежность к классу вполне интегрируемых) для модели Ландау–Лифшица с анизотропией, и в [5], где методом “одевания” были найдены ее точные решения. Отметим здесь также работу [6], посвященную построению интегрируемых деформаций модели Гейзенберга.

Значительно сложнее обстоит дело в двумерном случае. Соответствующее нестационарное уравнение ферромагнетика Ландау–Лифшица, как изотропное, так и с членом, описывающим анизотропию, оказывается неинтегрируемым (см., например, [7]), и допускает явные точные решения лишь в весьма специальных случаях. В то же время, имеются убедительные свидетельства существования стабильных локализованных двумерных возбуждений с конечной энергией как непосредственно в экспериментах [8], так и при численном моделировании [9], причем, благодаря двумерности системы, спектр таких возбуждений становится существенно разнообразнее – в нем, в частности, появляются нетривиальные топологические объекты.

В работе Ишимори [10] была предложена модель, являющаяся в настоящее время основным инструментом при феноменологическом описании ферромагнетиков в размерности $(2+1)$. Это связано, в первую очередь, с главным свойством этой модели – вполне интегрируемостью, что позволило, используя МОЗР и процедуру $\bar{\partial}$-одевания, построить достаточно широкий набор ее решений (вихри (лампы), рационально-экспоненциальные, инстантоны и т.д.) на тривиальном фоне [11 – 14], а применение преобразования Дарбу нестандартного вида привело в [15], в частности, к обнаружению интересного с физической точки зрения решения: вихря, движущегося по окружности с постоянной угловой скоростью.

Следует сказать, однако, что “платой” за возможность построения точных решений в двумерном случае явилась необходимость введения в модель (наряду с обменным) нелокального взаимодействия спинов. Физический механизм, реализующий такое взаимодействие, пока неясен. В связи с этим подчеркнем, что и механизм стандартного гейзенбергова (обменного) взаимодействия, изучаемый в рамках так называемой Schwinger-boson mean-field theory, стал более понятен лишь сравнительно недавно (см., например, [8] и цитируемую там литературу). Это дает основание надеяться, что природа нелокальности, обеспечивающей существование широкого спектра совершенно осмысленных решений и соответствующих им наблюдаемых физических объектов, в дальнейшем будет прояснена, а модель Ишимори (в кон-

[1)]e-mail: gutshab@EG2097.spb.edu

тексте принятого макроскопического подхода) является достаточно реалистичной.

Цель данной работы – предложить новую и сравнительно эффективную процедуру интегрирования модели ферромагнетика Ишимори, открывающую возможность строить точные решения, в том числе, и на нетривиальном фоне, что в рамках МОЗР (или метода $\bar{\partial}$-одевания) может привести к значительным техническим трудностям.

Модель магнетика Ишимори имеет вид

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge (\mathbf{S}_{xx} + \alpha^2 \mathbf{S}_{yy}) + u_y \mathbf{S}_x + u_x \mathbf{S}_y, \tag{1a}$$

$$u_{xx} - \alpha^2 u_{yy} = -2\alpha^2 \mathbf{S}(\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y), \tag{1b}$$

где $\mathbf{S}(x,y,t) = (S_1, S_2, S_3)$ – трехмерный вектор намагниченности, $|\mathbf{S}| = 1$, $u = u(x,y,t)$ – вспомогательное скалярное вещественнозначное поле, параметр α^2 принимает значения ± 1. Случай $\alpha^2 = 1$ будем называть моделью магнетика Ишимори-I (MI-I), случай $\alpha^2 = -1$ – моделью MI-II.

Отметим здесь, что в частном случае – статическом пределе ($\mathbf{S} = \mathbf{S}(x,y)$) и $u = \mathrm{const}$ – модель MI-I переходит в модель двумерного изотропного ферромагнетика Гейзенберга (эллиптическую версию нелинейной $O(3)$-сигма-модели), которая с помощью МОЗР с граничными условиями типа спиральных структур была проинтегрирована в [16, 17].

Характерная черта модели (1) – наличие топологического заряда

$$Q_T = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y) dx dy, \tag{2}$$

который сохраняется в процессе эволюции системы (инвариант движения) и представляет собой отображение единичной 2-сферы на 2-сферу: $\tilde{S}^2 \to \tilde{S}^2$. Такое отображение, как известно, характеризуется гомотопической группой $\pi_2(\tilde{S}^2) = Z$, где Z – группа целых чисел, что означает, что величина Q_T должна быть целым числом. Скалярная функция $u = u(x,t)$, согласно уравнению (1b), связана с плотностью производства топологического заряда[2)].

Система (1) интегрируется с помощью следующей ассоциированной линейной системы:

$$\Psi_y = \frac{1}{\alpha} S \Psi_x, \tag{3a}$$

$$\Psi_t = -2iS\Psi_{xx} + Q\Psi_x, \tag{3b}$$

где $Q = u_y I + \alpha^3 u_x S + i\alpha S_y S - iS_x$, $\Psi = \Psi(x,y,t) \in \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$, $S = \sum_{i=1}^{3} S_i \sigma_i$, σ_i – стандартные матрицы Паули, I – единичная 2×2 матрица. В силу своего определения матрица S обладает свойствами: $S = S^*$, $S^2 = I$, $\det S = -1$, $\mathrm{Sp}\, S = 0$ (символ $(*)$ означает эрмитовское сопряжение).

В дальнейшем для определенности мы ограничимся случаем MI-II ($\alpha = i$) (случай MI-I анализируется вполне аналогично).

В качестве метода решения (1) будем использовать обобщенное матричное преобразование Дарбу[3)]. Для этого потребуем ковариантность системы (3): $U \to \tilde{U}$, $\Psi \to \tilde{\Psi}$, относительно преобразования вида ($U \equiv S$)[4)]

$$\tilde{\Psi} = \Omega(\Psi, \Psi_1)\Psi_1^{-1}, \tag{4}$$

где $\Psi_1 = \Psi_1(x,y,t)$ – некоторое невырожденное затравочное решение системы (3), $\Omega(\Psi,\Psi_1) \equiv \Omega(x,y,t) \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ – функционал, заданный на множестве пар матричных функций[5)]. Из (3a) тогда получаем два одевающих соотношения:

$$\tilde{U} = \Omega \Psi_1 U \Psi_1^{-1} \Omega^{-1}, \quad \tilde{U} = i\Omega_y (\Omega_x)^{-1}. \tag{5}$$

Отсюда, полагая $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\partial_z = = (1/2)(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar{z}} = (1/2)(\partial_x + i\partial_y)$, $W^{(0)} = = \Psi_1^{-1} U \Psi_1$, будем иметь первое уравнение на матрицу Ω ($\det(I \pm U) = \det(I \pm W^{(0)}) = 0$):

$$(I - W^{(0)})(\Omega^{-1})_{\bar{z}} = 0. \tag{6}$$

Заметим теперь, что в силу соотношения симметрии $\bar{U} = -\sigma_2 U \sigma_2$ имеют место инволюции:

$$\Psi = \sigma_2 \bar{\Psi} \sigma_2, \ \ Q = \sigma_2 \bar{Q} \sigma_2, \ \ \Omega = \sigma_2 \bar{\Omega} \sigma_2, \tag{7}$$

что означает, в частности, что уравнение (6) можно переписать в “сопряженной” форме:

$$(I + W^{(0)})(\Omega^{-1})_z = 0. \tag{8}$$

Для получения второго уравнения на матрицу Ω следует воспользоваться (3b). Это уравнение оказывается, однако, весьма громоздким. Принимая во внимание, что формулы (5)–(6) легко выражаются в

[2)] Строго говоря, функция u не имеет прямого физического смысла, однако функции u_y, u_x, связанные между собой уравнением (1b), по-видимому, можно интерпретировать как “коэффициенты трения”, создающего вынужденную прецессию вектора намагниченности $\mathbf{S}$, вдоль оси x и y, соответственно.

[3)] В [18] был предложен подход, связанный с применением преобразования Дарбу к системе, калибровочно эквивалентной (3), и с последующим построением одевающих соотношений.

[4)] В литературе такое преобразование в скалярном варианте иногда носит название преобразования Мутарда [19].

[5)] Как следует из (3a), матричные решения Ψ и Ψ_1 связаны между собой нелинейным соотношением $\Psi_y(\Psi_x)^{-1} = = \Psi_{1y}(\Psi_{1x})^{-1}$.

терминах функции $\tilde{\Psi}$, дальнейшие рассуждения проще всего, оказывается, проводить также для этой функции.

Используем тождество $Q+UQ=-2i(I+U)(uI+U)_{\bar z}$. Из (3b) тогда получаем:

$$(I+U)\{\Psi_t+2i\Psi_{xx}+2i(u_{\bar z}I+U_{\bar z})\Psi_x\}=0. \qquad (9)$$

Преобразуем это уравнение. С учетом соотношения $\Psi_{y\bar z}=-U_{\bar z}\Psi_x-iU\Psi_{x\bar z}$, следующего из (3a), имеем:

$$(I+U)\{\Psi_t+2i\Psi_{xx}+2iu_{\bar z}\Psi_x-2\Psi_{y\bar z}-2iU\Psi_{x\bar z}\}=0. \qquad (10)$$

Умножая обе части этого уравнения слева на U и складывая полученное уравнение с (10), находим:

$$(I+U)\{\Psi_t+2i\Psi_{zz}+2i\Psi_{\bar z\bar z}+4iu_{\bar z}\Psi_{\bar z}\}=0. \qquad (11)$$

Таким образом, после применения преобразования (4) и требования ковариантности получаем два (и еще два аналогичных “сопряженных”) уравнения на функцию $\tilde{\Psi}$:

$$(I-\tilde U)\tilde\Psi_{\bar z}=0, \qquad (12)$$

$$(I+\tilde U)\{\tilde\Psi_t+2i\tilde\Psi_{zz}+2i\tilde\Psi_{\bar z\bar z}+4i\tilde u_{\bar z}\tilde\Psi_{\bar z}\}=0. \qquad (13)$$

Принимая, далее, во внимание тождества $\mathbf{S}(\mathbf{S}_x\wedge\mathbf{S}_y)=(1/2i)\,\mathrm{Sp}\,(UU_xU_y)$ и

$$\mathrm{Sp}\,(\tilde U\tilde U_x\tilde U_y)=\mathrm{Sp}\,(UU_xU_y)+2i\triangle(\ln\det\tilde\Psi)+$$
$$+2i\mathrm{Sp}\,\{[U,U_x]\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_x+[U,U_y]\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_y\}+$$
$$+4\mathrm{Sp}\,\{U[\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_y,\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_x]\}, \qquad (14)$$

где $\triangle$ – двумерный оператор Лапласа, и требуя ковариантности уравнения (1b), перепишем его как

$$\triangle(\tilde u-u-2\ln\det\tilde\Psi)=2\,\mathrm{Sp}\,\{[U,U_x]\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_x+$$
$$+[U,U_y]\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_y-2iU[\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_y,\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_x]\}. \qquad (15)$$

Выражение для “одетого” топологического заряда при этом будет иметь вид

$$\tilde Q_T=Q_T+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\,dy\,\triangle\ln\,\det\tilde\Psi+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dxdy\,\mathrm{Sp}\,\;\{[U,U_x]\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_x+[U,U_y]\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_y-$$
$$-2iU[\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_y,\tilde\Psi^{-1}\tilde\Psi_x]\}. \qquad (16)$$

При N-кратном одевании стартового затравочного решения $U=U^{(1)}\equiv U[0]$, вводя обозначения $\Psi[1]=\tilde\Psi,\ldots,U[1]=\tilde U,\ldots,u[1]=\tilde u,\ldots,Q_T[1]=\tilde Q_T,\ldots$, из формул (5), (15) и (16) нетрудно получить[6)]

$$U[N]=\left(\prod_{j=0}^{N-1}\Psi[N-j]\right)U\left(\prod_{j=0}^{N-1}\Psi[N-j]\right)^{-1}, \qquad (17)$$

$$u[N]=u+2\sum_{j=1}^{N}\ln\det\Psi[j]+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx'dy'G(x-x',y-y')\times \qquad (18)$$

$$\times\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Sp}\,A_j(x',\,y',\,t),$$

$$Q_T[N]=Q_T+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\,dy\sum_{j=1}^{N}\triangle\ln\det\Psi[j]+ \qquad (19)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx'dy'\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Sp}\,A_j(x',\,y',\,t),$$

где $A_j(x,\,y,\,t)=\Big[U[j-1],U_x[j-1]\Big]\tilde\Psi[j]^{-1}\tilde\Psi_x[j]+\Big[U[j-1],U_y[j-1]\Big]\tilde\Psi[j]^{-1}\tilde\Psi_y[j]-2iU[j-1]\times\Big[\tilde\Psi[j]^{-1}\tilde\Psi_y[j],\tilde\Psi[j]^{-1}\tilde\Psi_x[j]\Big]$, $G(x,y)=(1/2\pi)\ln(x^2+y^2)$ – функция Грина уравнения Лапласа.

Возвращаясь к однократному одеванию, заметим, что соотношения (12), (13) определяют всю совокупность решений модели (1) (в безотражательном, пользуясь терминологией МОЗР, секторе задачи). При этом, как следует из (12), (13), очевидно, возможны четыре случая: 1) $\tilde\Psi_{\bar z}=0$ и выражение в фигурных скобках в (13) также равно нулю; 2) $\tilde\Psi_{\bar z}=0$, а выражение в фигурных скобках не равно нулю; 3) ситуация противоположная 2); 4) $\tilde\Psi_{\bar z}\neq 0$, и выражение в (13) также не обращается в нуль, то есть столбцы этих матриц принадлежат ядрам вырожденных преобразований $I-\tilde U$ и $I+\tilde U$ соответственно.

Ввиду краткости места, здесь мы ограничимся только первым случаем. Тогда:

$$\tilde\Psi_{\bar z}=0,\quad \tilde\Psi_t+2i\tilde\Psi_{zz}=0. \qquad (20)$$

[6)]Эти формулы также могут быть представлены в терминах матричных функционалов $\Omega(\Psi_i,\,\Psi_j)$, где Ψ_i, Ψ_j – некоторые затравочные решения системы (3), соответствующие выбору $S=S^{(1)}$.

Эта система имеет хорошо известные полиномиальные решения ($\tilde{\Psi} = \{\tilde{\Psi}_{ij}\}$, $i,j = 1,2$, $\tilde{\Psi}_{22} = \bar{\tilde{\Psi}}_{11}$, $\tilde{\Psi}_{12} = -\bar{\tilde{\Psi}}_{21}$)([10, 13]):

$$\tilde{\Psi}_{11}(z,t) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{m+2n=j} \frac{a_j}{m!n!} \left(-\frac{1}{2}z\right)^m \left(-\frac{1}{2}it\right)^n,$$
$$\tilde{\Psi}_{21}(z,t) = \sum_{j=0}^{M_1} \sum_{m+2n=j} \frac{b_j}{m!n!} \left(-\frac{1}{2}z\right)^m \left(-\frac{1}{2}it\right)^n, \tag{21}$$

где N_1, M_1 – натуральные числа, $M_1 = N_1 - 1$, a_j, b_j – некоторые комплексные числа, а внутренние суммирования ведутся по всем возможным комбинациям чисел m, $n \geq 0$, таким, что $m + 2n = j$.

В качестве затравочного решения системы (1) возьмем вектор-функцию $\mathbf{S}^{(1)} = (0, \sin\Phi^{(1)}, \cos\Phi^{(1)})$, где $\Phi^{(1)} = \delta_0 t + \alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0$, α_0, β_0, γ_0,$\delta_0 \in \mathbb{R}$ – параметры, то есть решение, представляющее собой двумерную спиральную структуру, причем, согласно (2), $Q_T = Q_T^{(1)} = 0$. Тогда для определения функции $u(x,\ y,\ t) = u^{(1)}(x,\ y,\ t)$ необходимо подставить этот вектор в уравнения (1a) и (1b), в результате чего мы получим для нее два линейных уравнения. Из требования их совместности и после интегрирования находим:

$$u^{(1)} = g_0^{(1)}(y + \frac{\beta_0}{\alpha_0}x) + \int^s g_1^{(1)}(y(s') + \frac{\beta_0}{\alpha_0}x(s'), t)\, ds', \tag{22}$$

где $g_0^{(1)}$, $g_1^{(1)}$ – произвольные функции, причем $g_0^{(1)}$ постоянна на характеристике $y + (\beta_0/\alpha_0)x = \mathrm{const}$, а s – параметр вдоль этой характеристики. Таким образом, явное выражение для $\tilde{u}$ будет определяться соотношением (18) при $N = 1$ с учетом (21), (22).

Одевающее соотношение (17) дает ($S_+ = S_1 + iS_2$):

$$\tilde{S}_3(x,\ y,\ t) = \frac{\cos\Phi^{(1)}(|\tilde{\Psi}_{11}|^2 - |\tilde{\Psi}_{21}|^2) - i\sin\Phi^{(1)}(\bar{\tilde{\Psi}}_{21}\bar{\tilde{\Psi}}_{11} - \tilde{\Psi}_{21}\tilde{\Psi}_{11})}{|\tilde{\Psi}_{11}|^2 + |\tilde{\Psi}_{21}|^2},$$
$$\tilde{S}_+(x,\ y,\ t) = \frac{2\cos\Phi^{(1)}\tilde{\Psi}_{21}\bar{\tilde{\Psi}}_{11} + i\sin\Phi^{(1)}(\bar{\tilde{\Psi}}_{11}^2 + \bar{\tilde{\Psi}}_{21}^2)}{|\tilde{\Psi}_{11}|^2 + |\tilde{\Psi}_{21}|^2}. \tag{23}$$

Полагая $\delta_0 = 0$, $N_1 = 1$, отсюда получим простейшее статичное (анти)вихревое ("одноламповое") решение на фоне также статичной спиральной структуры:

$$\tilde{S}_3(x,y,t) = \frac{\cos\Phi^{(1)}[|a_0 - \frac{1}{2}a_1 z|^2 - |b_0|^2] + i\sin\Phi^{(1)}[b_0(a_0 - \frac{1}{2}a_1 z) - \bar{b}_0(\bar{a}_0 - \frac{1}{2}\bar{a}_1\bar{z})]}{|a_0 - \frac{1}{2}a_1 z|^2 + |b_0|^2},$$
$$\tilde{S}_+(x,y,t) = \frac{2b_0\cos\Phi^{(1)}(\bar{a}_0 - \frac{1}{2}\bar{a}_1\bar{z}) + i\sin\Phi^{(1)}[b_0^2 + (\bar{a}_0 - \frac{1}{2}\bar{a}_1\bar{z})^2]}{|a_0 - \frac{1}{2}a_1 z|^2 + |b_0|^2}. \tag{24}$$

Вычисления по соотношению (16) показывают, что $\tilde{Q}_T \to \infty$: расходимость возникает при интегрировании первых двух слагаемых последнего члена. При $\delta_0 = \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$ решение (24) переходит в статичный (анти)вихрь (на тривиальном фоне) с топологическим зарядом $\tilde{Q}_T = -1$ (см. также [13]).

При $\delta_0 \neq 0$, $N_1 = 2$, то есть $\tilde{\Psi}_{11} = a_0 - (a_1/2)z + (a_2/2)[(1/4)z^2 - it]$, $\tilde{\Psi}_{21} = b_0 - (1/2)b_1 z$, формулы (23) описывают динамическое (анти)двухвихревое ("двухламповое") состояние на фоне также динамической спиральной структуры с $\tilde{Q}_T \to \infty$, а при обращении параметров, входящих в $\Phi^{(1)}$, в нуль оно переходит в состояние с $\tilde{Q}_T = -2$.

Очевидно, что реальны и представляют интерес и "промежуточные" типы решений: статичный вихрь на фоне динамической спиральной структуры и динамический вихрь на фоне статичной спиральной структуры.

Эти результаты позволяют выдвинуть гипотезу о возможности в рассматриваемой системе структурного фазового перехода 2-го рода (аналогичного переходу Костерлица-Тулесса) спираль-вихрь $\to$ вихрь. Для этого следует предположить, что параметры δ_0, α_0, β_0, γ_0 являются функциями времени - функционалами от внешнего нестационарного и не зависящего от пространственных переменных магнитного поля[7]. Тогда обращение

[7] Можно показать, что добавление в правую часть (1a) слагаемого вида $\mathbf{S} \wedge \mathbf{H}(t)$, где $\mathbf{H}(t)$ – вектор напряженности внешнего магнитного поля, приводит просто к "перенормировке" вектора намагниченности, то есть подходящим преобразованием это слагаемое можно устранить, считая при этом, что затравочное решение зависит от магнитного поля.

параметров в нуль означает, что существует некоторое критическое значение этого поля ("точка Кюри" или, конкретнее, точка Лифшица), которое и соответствует точке фазового перехода. В пользу высказанной гипотезы говорит и тот экспериментальный факт, что спиральная (модулированная, несоизмеримая) структура в магнитном поле может перейти в соизмеримую, отвечающую парамагнетику во внешнем поле с ориентацией магнитных моментов, в основном, вдоль этого поля[8)] [20]. Подчеркнем также, что подобный фазовый переход должен сопровождаться изменением симметрии и топологических свойств системы.

Еще одну новую серию решений модели (1) нетрудно получить, если решения системы (20) искать в виде

$$\tilde{\Psi}_{11,21}(x,\, y,\, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_{11,21}(p) e^{-2ip^2 t + pz} dp. \tag{25}$$

Здесь $B_{11,21}$ – функциональные параметры. В частности, положив $B_{11,21}(p) = c_{11,21}\delta(p - p_{11,21})$, где $\delta(.)$ – дельта-функция Дирака, $c_{11,21} \in \mathbb{C}$, $p_{11,21} \in \mathbb{R}$ – параметры, с учетом (17) находим ($c_{11,21} \neq 0$, а символ c.c. означает комплексно-сопряженную величину):

$$\tilde{S}_3(x,\, y,\, t) = \frac{\cos\Phi^{(1)}[|c_{11}|^2 e^{2|p_{11}|x} - |c_{21}|^2 e^{2|p_{21}|x}] - i\sin\Phi^{(1)}[\bar{c}_{11}\bar{c}_{21} e^{2i(p_{11}^2 + p_{21}^2)t + 2(p_{11}+p_{21})\bar{z}} - \text{c.c.}]}{|c_{11}|^2 e^{2p_{11}x} + |c_{21}|^2 e^{2p_{21}x}},$$

$$\tilde{S}_+(x,\, y,\, t) = \frac{2\bar{c}_{11}c_{21}\cos\Phi^{(1)} e^{2i(p_{11}^2 - p_{21}^2)t + p_{11}\bar{z} + p_{21}z} + i\sin\Phi^{(1)}(\bar{c}_{11}^2 e^{4ip_{11}^2 t + 2p_{11}\bar{z}} + c_{21}^2 e^{-4ip_{21}^2 t + 2p_{21}z})}{|c_{11}|^2 e^{2p_{11}x} + |c_{21}|^2 e^{2p_{21}x}}. \tag{26}$$

Таким образом, мы получили экспоненциальное и несингулярное решение на фоне спиральной структуры. При $\Phi^{(1)} \to 0$ оно будет конечно, если $p_{11}, p_{21} > 0$; при этом компонента $\tilde{S}_3$ будет эволюционировать только по переменной x.

Более сложные решения этого типа можно найти, взяв функционалы $B_{11,21}$ в виде линейной комбинации дельта-функций.

Полученные здесь результаты интересно сопоставить с результатами работы [22], в которой была доказана калибровочная эквивалентность модели MI-II и известной из гидродинамики системы Деви-Стюартсона-II (описывающей эволюцию почти монохроматического волнового пакета с малой амплитудой на поверхности жидкости малой глубины). Это означает, что существует калибровочное преобразование, переводящее лаксову пару для одной системы в другую, что, в свою очередь, позволяет установить формулы связи решений этих систем. Важным моментом при этом оказывается то, что подобной эквивалентностью должны обладать начально-граничные задачи с заданными классами: в [22] в обоих случаях предполагался класс быстроубывающих данных Коши. Ясно, что в рассмотренном нами случае спиральных (и, следовательно, неубывающих) структур калибровочная эквивалентность отсутствует, а построенные на их фоне решения не могут быть получены из решений модели Деви-Стюартсона-II.

В заключение отметим, что развитый выше подход легко переносится на серию моделей магнетиков Мирзакулова [23, 24], являющихся различными модификациями модели Ишимори: для них первое уравнение лаксовой пары близко или совпадает с (3a), а основные изменения связаны с функционалом Q, входящим в (3b).

Автор выражает глубокую благодарность А. Б. Борисову за внимание к данной работе, а также С. А. Зыкову и А. В. Широкову за поддержку.

1. Л. Д. Ландау, *Собрание трудов*, т.1, М.: Гостехиздат, 1969, стр. 128-143.
2. L. A. Takhtajan, Phys. Lett. **64A**, 235. (1977).
3. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, М.: Наука, 1986.
4. E. K. Sklyanin, Preprint No E-3-79, LOMI, Leningrad, 1979.
5. А. И. Бобенко, Зап. научн. сем. ЛОМИ. Вопр. квант. теории поля и стат. физ. **123**, 58 (1983).

[8)] Ясно, что теоретическая проверка высказанной гипотезы должна сводится к переходу в пространство параметров порядка системы и анализу функционала Гинзбурга–Ландау в окрестности критической точки. Однако, хотя гамильтониан системы (1) известен (вообще говоря, в [21] он получен для модифицированной модели MI), соответствующие вычисления даже на простейших решениях оказываются чрезвычайно громоздкими и выходят за рамки данной работы.

6. A. V. Mikhailov and A. B. Shabat, Phys. Lett. **116A**, 191 (1986).
7. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1994).
8. Tai Kai Ng, Phys. Rev. Lett. **82**, 3504 (1999).
9. B. Piette and W. J. Zakrzewski, Physica **D119**, 314 (1998).
10. Y. Ishimori, Progr. Theor. Phys. **72**, 33 (1984).
11. V. G. Dubrovsky and B. G. Konopelchenko, Preprint No.90-76, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, 1990.
12. V. G. Dubrovsky and B. G. Konopelchenko, Preprint № 91-29, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, 1990.
13. B. G. Konopelchenko, *Solitons in Multidimensions*, World Scientific, 1993.
14. В. Г. Михалев, Зап. научн сем. ЛОМИ. Вопр. квант. теории поля и стат. физ. **189**, 75 (1991).
15. K. Imai and K. Nozaki, Progr. Theor. Phys. **96**, 521 (1996).
16. Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, ТМФ **90**, 175 (1992).
17. Г. Г. Варзугин, Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, ТМФ **104**, 513 (1995).
18. Е. Ш. Гутшабаш, Зап. научн. сем. ЛОМИ. Вопр. квант. теории поля и стат. физ. **271**, 155 (2002); nlin.SI/0302002.
19. C. Athorne and J. J. Nimmo, Inv. Prob. **7**, 809 (1995).
20. Ю. А. Изюмов, *Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах*, М.: Наука, 1987.
21. L. Martina, G. Profilo, G. Soliani, and L. Solombrino, Phys. Rev. **B49**, 12915 (1994).
22. В. Д. Липовский, А. В. Широков, Функ. ан. и прил. **23**, 65 (1989).
23. R. Myrzakulov, Preprint KSU, Alma-Ata, 1987.
24. N. K. Bliev, G. Nugmanova, R. N. Syzdukova, and R. Myrzakulov, Preprint CNLP № 1997-05, Alma-Ata, 1997; solv/int 990214.