

Квазилинейная теория нелинейного уравнения Шредингера с периодическими коэффициентами

С. Б. Медведев, М. П. Федорук¹⁾

Институт вычислительных технологий Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 30 октября 2003 г.

После переработки 5 декабря 2003 г.

Исследуется нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) с периодическими коэффициентами в условиях большой вариации локальной дисперсии. Решение после n периодов представляется в виде суммы решения линейной части НУШ и нелинейной поправки на первом периоде, умноженной на число периодов n . Предложен численный алгоритм вычисления квазилинейного решения в случае произвольных начальных условий. Получено явное выражение нелинейной поправки к решению для последовательности импульсов гауссовской формы.

PACS: 42.65.Tg, 42.81.Dp

1. Введение. Интерес к исследованию оптических солитонов в рамках нелинейного уравнения Шредингера с периодическими коэффициентами значительно возрос в последнее десятилетие в связи с практическими достижениями использования солитонов в современных волоконно-оптических линиях связи. В качестве носителей информации в коммуникационных системах используются так называемые солитоны с дисперсионным управлением (dispersion managed solitons) (ДУ-солитоны) (см., например, [1]). Отметим, что здесь под солитоном подразумевается устойчивое локализованное решение, а не традиционный (фундаментальный) солитон из теории полностью интегрируемых систем [2]. Периодическое изменение дисперсии системы позволяет увеличить амплитуду солитона по сравнению с аналогичным импульсом в системах с постоянной дисперсией и, как следствие, повысить коэффициент отношения мощности сигнала к шуму.

Одними из главных факторов, ограничивающими передачу данных на большие расстояния с низким коэффициентом ошибки в линиях и скоростью передачи данных 40 Гб/с и выше, являются паразитные возмущения поля, возникающие на исходно пустых местах в последовательности оптических импульсов за счет нелинейного четырехволнового взаимодействия [3]. В последнее время предпринято несколько попыток построения упрощенной квазилинейной теории данного явления [4–8]. В работе [5] для вычисления паразитных возмущений поля и энергии в “пробном” бите рассматривалось его взаимодействие

с ближайшими соседями. В [6, 8] среднее возмущение энергии (amplitude jitter) для случайной битовой последовательности находилось суммированием всех возможных комбинаций с учетом резонансного условия. Аналогичный подход использовался в работе [7] и для вычисления среднего временного сдвига (timing jitter) за счет кросс-фазовой модуляции, для этого рассматривалось попарное взаимодействие “пробного” импульса с каждым из импульсов последовательности, а затем производилось суммирование по всем возможным комбинациям битов.

В данной работе получено квазилинейное уравнение, позволяющее вычислить нелинейную поправку к произвольному начальному распределению оптического поля в любой точке временного интервала t , а не в отдельных точках “пробных” битов, как это сделано в [4–8]. Предложен эффективный численный алгоритм для вычисления паразитных возмущений поля, основанный на быстром преобразовании Фурье. Этот алгоритм дает значительный выигрыш во времени по сравнению с алгоритмами прямого вычисления сумм, рассмотренными в [7, 8].

Кроме того, получены оценки минимального числа соседних импульсов, которые влияют на решение в заданной точке “пробного” бита для широкого ряда параметров волоконно-оптической линии.

В этой статье мы рассмотрим периодические линии с относительно большой вариацией локальной дисперсии по сравнению со средней дисперсией на периоде. Случай слабой вариации локальной дисперсии был рассмотрен в [9].

2. Квазилинейное решение. Распространение оптических импульсов в волоконных световодах

¹⁾e-mail: mife@ict.nsc.ru

описывается обобщенным нелинейным уравнением Шредингера

$$i \frac{\partial B}{\partial z} + d(z) \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \sigma(z) |B|^2 B = iG(z)B, \quad (1)$$

где B – комплексная огибающая электромагнитного поля и периодические коэффициенты $d(z)$, $\sigma(z)$, $G(z)$ описывают дисперсию, нелинейность и усиление (потери). Пусть начальные условия для данного уравнения имеют вид $B(t, 0) = B_0(t)$. Без ограничения общности предположим, что период изменения всех коэффициентов в уравнении (1) равен единице и $\langle G \rangle = \int_0^1 G(z) dz = 0$. Последнее условие означает, что потери и усиление взаимно компенсируют друг друга на периоде.

Для исключения линейной части уравнения выполним следующее преобразование

$$B(z, t) = e^{g(z) + i(R(z) + \langle d \rangle z) \Delta} X(z, t), \quad (2)$$

где $g(z) = \int_0^z G(s) ds$, $R(z) = \int_0^z (d(s) - \langle d \rangle) ds$. Уравнение для X принимает форму

$$X_z = ic(z) e^{-i\rho(z)\Delta} \left[\left| e^{i\rho(z)\Delta} X \right|^2 e^{i\rho(z)\Delta} X \right], \quad (3)$$

где

$$c(z) = \sigma(z) e^{2g(z)}, \quad \rho(z) = R(z) + \langle d \rangle z, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (4)$$

Мы предположим, что коэффициент нелинейности мал $c(z) \sim \varepsilon \ll 1$, тогда исходное уравнение (1) – квазилинейно. Начальные условия для (3) есть $X(t, 0) = B_0(t)$. Для решения этого уравнения на расстояния, сравнимые с ε^{-1} , применим итерационную процедуру. Первая итерация приводит к решению в следующей форме:

$$\begin{aligned} X(t, z) &= X^{(1)}(t, z) = B_0(t) + \\ &+ i \int_0^z c(s) e^{-i\rho(s)\Delta} \left[\left| e^{i\rho(s)\Delta} B_0(s) \right|^2 e^{i\rho(s)\Delta} B_0(s) \right] ds, \\ X^{(0)} &= B_0(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Для практических приложений представляет интерес нахождение решения в точках $z_n = n$ после n периодов. К сожалению, подынтегральное выражение в (5) не является периодической функцией s , исключая случай $\langle d \rangle = 0$, и для нахождения решения через n периодов необходимо выполнить интегрирование от 0

до n . Однако мы рассмотрим случай, когда периодический член $R(z)$ значительно превышает линейный член $\langle d \rangle z$ в выражении для функции $\rho(z)$. Используя это обстоятельство, получим из (5) следующее уравнение:

$$\begin{aligned} X(t, z) &= B_0(t) + \\ &+ i \int_0^z c(s) e^{-iR(s)\Delta} \left[\left| e^{iR(s)\Delta} B_0(s) \right|^2 e^{iR(s)\Delta} B_0(s) \right] ds + \\ &+ O(\langle d \rangle z). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда легко найти решение после n периодов:

$$X(t, n) = B_0(t) + n \Delta X(t), \quad (7)$$

где поправка к начальному решению на одном периоде дается выражением

$$\begin{aligned} \Delta X(t) &= \\ &= i \int_0^1 c(s) e^{-iR(s)\Delta} \left[\left| e^{iR(s)\Delta} B_0(s) \right|^2 e^{iR(s)\Delta} B_0(s) \right] ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Для получения решения в исходных переменных необходимо применить преобразование, обратное к (2). Легко показать, что решение $B(t, n)$ имеет вид

$$B(t, n) = e^{i\langle d \rangle n \Delta} (B_0(t) + n \Delta X(t)). \quad (9)$$

Первый член в уравнении (9) описывает линейную эволюцию начального решения, а второй дает нелинейную поправку к решению. Отметим, что функция $\Delta X(t)$ описывает нелинейные эффекты. Поправка $\Delta X(t)$ может быть найдена численно для произвольной функции $B_0(t)$, или аналитически для специфических начальных условий $B_0(t)$.

3. Аналитическое решение для гауссовских импульсов. Рассмотрим начальные данные в виде бесконечной последовательности гауссовских импульсов

$$B_0(t) = \sum_k e^{-p_k t^2 - q_k t - r_k}, \quad (10)$$

где все коэффициенты комплексные и $\text{Re } p_k > 0$. Тогда выражение для функции $\Delta X(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta X(t) &= \\ &= i \int_0^1 c(s) \sum_{l, m, n} \frac{1}{\sqrt{1 - 4ip_l^* R(s)}} \frac{1}{\sqrt{1 + 4ip_m R(s)}} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{1 + 4ip_n R(s)}} \frac{1}{\sqrt{1 - 4ip_{lmn} R(s)}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{p_{lmn} t^2 + q_{lmn} t + iq_{lmn}^2 R(s)}{1 - 4ip_{lmn} R(s)} - r_{lmn} \right\} ds, \end{aligned} \quad (11)$$

где символ * означает комплексное сопряжение и

$$p_{lmn} = \frac{p_l^*}{1 - 4ip_l^* R} + \frac{p_m}{1 + 4ip_m R} + \frac{p_n}{1 + 4ip_n R}, \quad (12)$$

$$q_{lmn} = \frac{q_l^*}{1 - 4ip_l^* R} + \frac{q_m}{1 + 4ip_m R} + \frac{q_n}{1 + 4ip_n R}, \quad (13)$$

$$r_{lmn} = \frac{iq_l^{*2} R}{1 - 4ip_l^* R} - r_l^* - \frac{iq_m^2 R}{1 + 4ip_m R} - r_m - \frac{iq_n^2 R}{1 + 4ip_n R} - r_n. \quad (14)$$

Для первого члена из (9) получим

$$e^{i(d)n\Delta} B_0(t) = e^{i(d)n\Delta} \sum_k e^{-p_k t^2 - q_k t - r_k} = \sum_k \frac{1}{\sqrt{1 + 4ip_k \langle d \rangle n}} \times \exp \left\{ -\frac{p_k t^2 + q_k t - iq_k^2 \langle d \rangle n}{1 + 4ip_k \langle d \rangle n} - r_k \right\} \quad (15)$$

и для второго члена

$$ne^{i(d)n\Delta} \Delta X(t) = in \int_0^1 c(s) \sum_{l,m,n} \frac{1}{\sqrt{1 - 4ip_l^* R(s)}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 4ip_m R(s)}} \frac{1}{\sqrt{1 + 4ip_n R(s)}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - 4ip_{lmn} R(s)}} \frac{1}{\sqrt{1 + 4i\hat{p}_{lmn} \langle d \rangle n}} \times \exp \left\{ -\frac{\hat{p}_{lmn} t^2 + \hat{q}_{lmn} t - i\hat{q}_{lmn}^2 \langle d \rangle n}{1 + 4i\hat{p}_{lmn} \langle d \rangle n} - \hat{r}_{lmn} \right\} ds, \quad (16)$$

где

$$\hat{p}_{lmn} = \frac{p_{lmn}}{1 - 4ip_{lmn} R(s)},$$

$$\hat{q}_{lmn} = \frac{q_{lmn}}{1 - 4ip_{lmn} R(s)}, \quad (17)$$

$$\hat{r}_{lmn} = \frac{iq_{lmn}^2 R(s)}{1 - 4ip_{lmn} R(s)} - r_{lmn}.$$

Полученные выражения слишком сложны для анализа и ниже мы рассмотрим более простой случай.

Предположим, что все импульсы имеют одинаковую ширину и равноудалены друг от друга на расстояние X :

$$B_0(t) = \sum_k N_k e^{-p_0(t - Xk)^2}, \quad (18)$$

где N_k есть комплексная амплитуда. Из общей формулы (11) получим

$$\Delta X(t) = i \int_0^1 c(s) \times \sum_{l,m,n} \frac{N_l^* N_m N_n}{\sqrt{1 + 4ip_0 R(s)} \sqrt{1 - 12ip_0 R(s)}} \times \exp \{ -a_{lmn} t^2 - b_{lmn} t - c_{lmn} \} ds, \quad (19)$$

где

$$a_{lmn} = \frac{3 - 4ip_0 R(s)}{1 - 12ip_0 R(s)} p_0,$$

$$b_{lmn} = -\frac{2p_0 X (l + m + n + 4ip_0 R(s)(l - m - n))}{1 - 12ip_0 R(s)}, \quad (20)$$

$$c_{lmn} = \frac{p_0 X^2 (l^2 + m^2 + n^2 - 8ip_0 R(s)(m^2 + n^2 - mn - ml - nl) + 16p_0^2 R^2(s)(l - m - n)^2)}{(1 + 4ip_0 R(s))(1 - 12ip_0 R(s))}. \quad (21)$$

Не все члены в этой тройной сумме одинаково важны при вычислении данного интеграла. Рассмотрим следующую функцию:

$$F_{lmn}(t, s) = \exp \{ -a_{lmn} t^2 - b_{lmn} t - c_{lmn} \}.$$

Для простоты предположим, что все амплитуды N_m одинаковы. Будем интересоваться шириной F_{lmn} как функцией параметра t . Для этой цели достаточно

рассмотреть $|F_{lmn}|$, который определяется реальными частями параметров a_{lmn} , b_{lmn} , c_{lmn} . Представим $|F_{lmn}|$ в следующей форме

$$|F_{lmn}| = \exp(-S) \exp(-P(t - Q)^2),$$

где

$$P = \frac{3 + 48(p_0 R(s))^2}{1 + (12p_0 R(s))^2} p_0,$$

$$Q = -(l - m - n)X + \frac{(4l - 2m - 2n)X}{3(1 + 48(p_0 R(s))^2)},$$

$$S = \frac{2p_0(l^2 + m^2 + n^2 - lm - ln - mn)X^2}{3(1 + 48(p_0 R(s))^2)}.$$

В этой формуле параметр P характеризует ширину функции, Q дает положение максимума и S описывает амплитуду.

Для оценки взаимодействия импульсов рассмотрим сумму в окрестности $t = 0$, тогда выражение

$$\sum_{l,m,n} |F_{lmn}(0, s)| \quad (22)$$

дает оценку нелинейной поправки к решению для импульса, локализованного в нуле.

Рассмотрим два предельных случая $(p_0 R)^2 \rightarrow 0$ и $(p_0 R)^2 \rightarrow \infty$, соответственно, показатели экспонент $PQ^2 + S$ для функции $|F_{lmn}(0, s)|$ имеют вид

$$PQ^2 + S = p_0 X^2 \left(\frac{1}{3} r_1^2 + \frac{1}{2} r_2^2 + \frac{1}{6} r_3^2 \right) + O((p_0 R)^2), \quad (23)$$

и

$$PQ^2 + S = p_0 X^2 \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81(p_0 R)^2} \right) r_1^2 + \frac{1}{96(p_0 R)^2} r_2^2 + \frac{1}{2592(p_0 R)^2} r_3^2 \right) + O((p_0 R)^{-4}), \quad (24)$$

где $r_1 = l - m - n$, $r_2 = m - n$ и $r_3 = 2l + m + n$.

Для каждого из этих предельных случаев возможны два типа начальных условий. Если ширина импульсов много меньше, чем расстояние между ними, тогда $p_0 X^2 \gg 1$, в противном случае $p_0 X^2 \ll 1$. Выполним теперь оценки четырех возможных вариантов комбинации параметра $p_0 R$ и начальных условий.

В первом случае $(p_0 R)^2 \rightarrow 0$ и $p_0 X^2 \gg 1$. Из формулы (23) видно, что показатель экспоненты равен нулю при $k = l = m = 0$ и много больше единицы для любой другой комбинации l , n и m . Это означает, что слагаемые в сумме (22) экспоненциально спадают с увеличением расстояния от нулевой точки, и для аппроксимации суммы достаточно взять слагаемое, соответствующее точке $(0,0,0)$, и несколько слагаемых с близкими номерами. Другими словами, это означает, что достаточно учесть несколько ближайших соседей к импульсу с нулевым номером.

Второй вариант соответствует $(p_0 R)^2 \rightarrow 0$ и $p_0 X^2 \ll 1$. Из формулы (23) видно, что показатель экспоненты равен нулю, если $k = l = m = 0$, но с удалением от этой точки растет медленно поскольку

$p_0 X^2 \ll 1$. В такой ситуации сумма (22) может быть приближена интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-PQ^2 - S} dl dm dn. \quad (25)$$

Очевидно, что ширина подынтегральной функции равна $1/\sqrt{p_0 X^2} \gg 1$. Для удовлетворительной конечно-разностной аппроксимации интеграла (25) требуется количество точек пропорциональное ширине. Таким образом, при вычислении исходной суммы необходимо учитывать импульсы с номерами, вплоть до $1/\sqrt{p_0 X^2}$.

Рассмотрим третью комбинацию, где $(p_0 R)^2 \rightarrow \infty$ и $p_0 X^2 \ll 1$. Для этих значений параметров коэффициенты при r_1 , r_2 и r_3 достаточно малы. Поэтому, как и в предыдущем случае, мы можем рассмотреть интеграл (25) как аппроксимацию соответствующей суммы (22). В каждом из направлений r_1, r_2, r_3 для удовлетворительной аппроксимации (25) мы должны выбрать определенное количество дискретных точек. Для r_1 число точек имеет порядок $1/\sqrt{p_0 X^2}$, для $r_2 - \sqrt{96}p_0 R/\sqrt{p_0 X^2}$ и для $r_3 - \sqrt{2592}p_0 R/\sqrt{p_0 X^2}$. Это означает, что при суммировании необходимо учитывать импульсы, номера которых не меньше $1/\sqrt{p_0 X^2}$.

Наконец, рассмотрим последний вариант $(p_0 R)^2 \rightarrow \infty$ и $p_0 X^2 \gg 1$. Из (6) видно, что в отличие от предыдущих случаев коэффициенты при координатах r_2 и r_3 зависят от величины $p_0 X^2 (p_0 R)^{-2}$, а коэффициент при r_1 зависит только от величины $p_0 X^2$. Поэтому для аппроксимации показателя экспоненты в сумме (22) при r_1 достаточно учитывать слагаемые, у которых координата r_1 близка к нулю. Рассмотрим показатель экспоненты в (22) по направлениям r_2, r_3 . Возможны два варианта. Если $p_0 X^2 (p_0 R)^{-2} \gg 1$, то для удовлетворительной аппроксимации (22) достаточно учесть ближайšie к нулевым импульсы также и по координатам r_2, r_3 . В обратном случае необходимо рассматривать $\sqrt{96}p_0 R/\sqrt{p_0 X^2}$ точек по координате r_2 и $\sqrt{2592}p_0 R/\sqrt{p_0 X^2}$ точек по r_3 .

Эти результаты были подтверждены прямыми вычислениями различных сумм.

В заключение этого раздела следует отметить, что оценки выполнены для равных амплитуд начальных импульсов. Учет различных амплитуд еще больше осложнит ситуацию. Однако полученные выше оценки дают представление о минимальном количестве соседних импульсов, которые могут влиять на решение в нулевой точке.

4. *Результаты численного интегрирования.* В начале рассмотрим алгоритмы численного интегрирования уравнений (1), (6).

Для численного решения нелинейного уравнения Шредингера (1) использовался симметричный метод расщепления по физическим процессам [1]:

$$B(z + \Delta z, t) = \exp\left(\frac{\Delta z}{2} \hat{N}\right) \exp(\Delta z \hat{D}) \exp\left(\frac{\Delta z}{2} \hat{N}\right) B(z, t). \quad (26)$$

Здесь \hat{D} – оператор, учитывающий дисперсию и потери в линейной среде, и \hat{N} – нелинейный оператор, учитывающий влияние нелинейности на распространение импульса. Экспоненциальный оператор $\exp(\Delta z \hat{D})$ можно оценить в спектральной области, используя следующую формулу:

$$\exp(\Delta z \hat{D}) B(z, t) = F_T^{-1} \exp(\Delta z \hat{D}(i\omega)) F_T B(z, t),$$

где F_T обозначает оператор фурье-преобразования.

Для вычисления функции

$$Y(t, s) = e^{-iR(s)\Delta} \left[\left| e^{iR(s)\Delta} B_0(s) \right|^2 e^{iR(s)\Delta} B_0(s) \right]$$

из (6) используется быстрое преобразование Фурье. Например,

$$e^{iR(s)\Delta} B_0(s) = F_T^{-1} \left(e^{-iR(s)\omega^2} F_T B_0(s) \right).$$

После вычисления $Y(t, s)$ для получения $X(t, z)$ достаточно выполнить однократное интегрирование по z в формуле (6).

В качестве примера рассмотрим симметричную дисперсионную карту TF+CF+TF с общими потерями 20 дБ. Для полной компенсации потерь в этой линии использовалась обратная Рамановская накачка. Параметры трансмиссионного волоконного световода (TF) были следующие: дисперсия 20 пс/нм/км при 1550 нм, эффективная площадь световода $A_{\text{eff}} = 106 \text{ мкм}^2$, потери в световоде 0.188 дБ/км при 1550 нм и 0.234 дБ/км при 1450 нм, нелинейный показатель преломления $n_2 = 2.7 \cdot 10^{-20} \text{ В}^{-1}/\text{м}^2$. Параметры компенсирующего волоконного световода (CF) выбирались следующие: дисперсия -42.3 пс/нм/км при 1550 нм, эффективная площадь световода $A_{\text{eff}} = 30 \text{ мкм}^2$, потери в световоде 0.233 дБ/км при 1550 нм и 0.304 дБ/км при 1450 нм, нелинейный показатель преломления $n_2 = 2.7 \cdot 10^{-20} \text{ В}^{-1}/\text{м}^2$.

Рис.1, 2 показывают поправку к начальной мощности сигнала δP как функцию времени после 10 периодических секций коммуникационной линии при

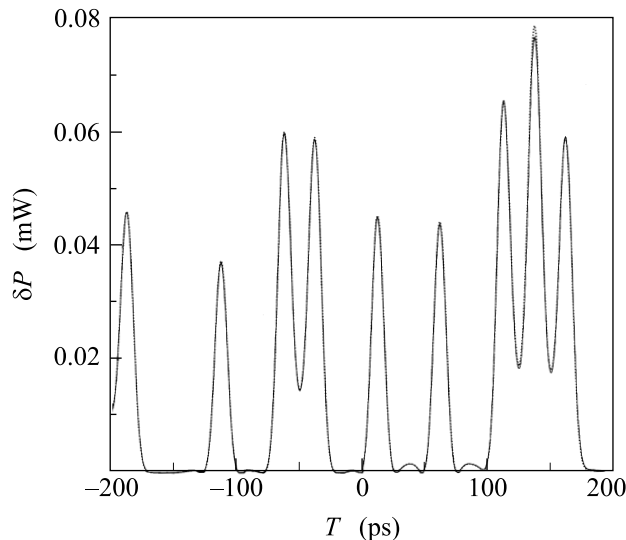


Рис.1

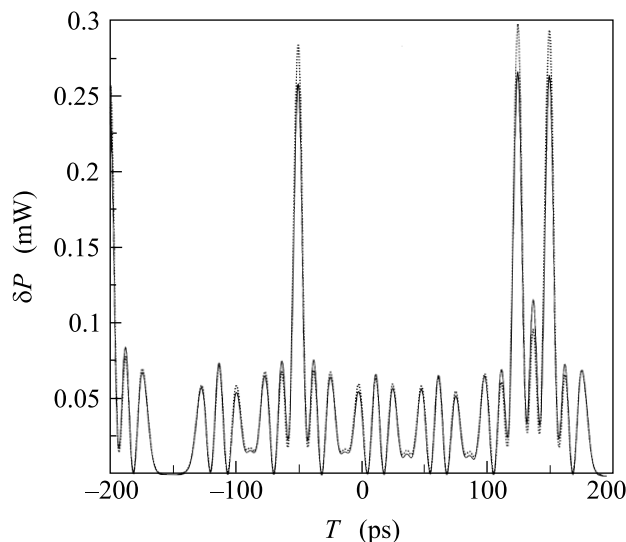


Рис.2

средних дисперсиях $\langle D \rangle = 0$ и $\langle D \rangle = 0.05 \text{ пс/нм/км}$, соответственно. В расчетах моделировалась псевдослучайная последовательность, состоящая из 128 бит общей длительностью 3200 пс (скорость передачи данных – 40 Гб/с), со следующими входными параметрами одиночного гауссовского импульса: шириной 12.5 пс и пиковой мощностью 1 мВт. Как видно из этих рисунков, квазилинейное приближение достаточно хорошо описывает эволюцию сигнала и может быть использовано для численного моделирования периодических волоконно-оптических линий передачи.

5. *Заключение.* В статье представлено решение уравнения (1) в виде явной функции от начальных

данных. Уравнение, соответствующее этому отображению, имеет следующий вид:

$$X_z = ic(z)e^{-iR(z)\Delta} \left[\left| e^{iR(z)\Delta} X \right|^2 e^{iR(z)\Delta} X \right]. \quad (27)$$

Данное уравнение отлично от уравнения, полученного посредством усреднения в [10, 11]. Уравнение (27) и отображение (7) имеют место, если $R(z) \gg \langle d \rangle z$. Преимущество этого отображения заключается в том, что нелинейные эффекты на периоде описываются единственной функцией $\Delta X(t)$. Предложен и реализован численный алгоритм, основанный на этом простом отображении. Этот алгоритм можно также использовать и для нахождения периодических решений усредненного уравнения [12].

Получено аналитическое решение для бесконечной последовательности гауссовских импульсов в рамках данного приближения. Аналитические оценки показывают, что учет только ближайших соседей при вычислении нелинейного взаимодействия “пробного” импульса с остальными импульсами битовой последовательности недостаточен при большой вариации локальной дисперсии.

1. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, Boston, 2001.

2. V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov, and L. P. Pitaevskii, *The Theory of Solitons. The Inverse Transform Method*, M.: Nauka, 1980.
3. P. V. Mamyshev and N. A. Mamysheva, *Optics Lett.* **24**, 1454 (1999).
4. F. Merlaud and S. K. Turitsyn, Proc. ECOC2000, **3**, Munchen, Germany, 2000, p. 35.
5. M. J. Ablowitz and T. Hirooka, *Optics Lett.* **25**, 1750 (2000).
6. M. J. Ablowitz and T. Hirooka, *Optics Lett.* **26**, 1846 (2001).
7. M. J. Ablowitz and T. Hirooka, *Optics Lett.* **27**, 203 (2002).
8. S. Kumar, J. C. Mauro, S. Raghavan, and D. Q. Chowdhury, *IEEE J. of selected topics in quantum electronics* **8**, 3 (2002).
9. S. B. Medvedev and S. K. Turitsyn, *JETP Lett.* **69**, 499 (1999).
10. I. Gabitov and S. K. Turitsyn, *Opt. Lett.* **21**, 327 (1996).
11. S. K. Turitsyn, V. K. Mezentsev, and E. G. Turitsyna, *Nonlinear mapping and path-averaged theory of dispersion-managed fiber communication systems*, with, Technical digest, Quantum Electronics and Photonics Conference, Manchester, 1999, Institute of Physics, p. 217.
12. S. B. Medvedev, O. V. Shtyrina, S. L. Musher, and M. P. Fedoruk, *Phys. Rev.* **E66**, 066606 (2002).