Письма в ЖЭТФ, том 43, вып. 12, стр. 565 – 567 *25 июня 1986 г.*

О "НЕОБРАТИМОСТИ" ПОТОКА РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ В ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А.Б.Зомолодчиков

Показано, что в двумерной перенормируемой теории поля существует функция $c(g)$ констант связи g, монотонно убывающая под действием преобразования ренормгруппы и принимающая постоянные значения только в неподвижных точках, где величина c совпадает с центральным зарядом алгебры Вирасоро соответствующей конформной теории поля.

Ренормализационная группа (РГ) – один из самых мощных методов качественного исследования в теории поля (ТП) [1, 2]. Грубо говоря, определение РГ сводится к следующему [1]. Пусть $S(g, a)$ – функционал действия (евклидовой) ТП, представляющий собой интеграл от локальной плотности $S = \int \sigma(g, a, x)dx$, снабженный ультрафиолетовым обрезанием a и зависящий от некоторого (возможно, бесконечного) набора безразмерных параметров $g = (g^1, g^2, \dots)$ – "констант связи". Основным является предположение о существовании однопараметрической группы движений пространства Q констант связи g: $R_t Q \to Q$ такой, что ТП, описываемая действием $S(R_t g, e^t a)$ эквивалентна исходной теории с действием $S(g, a)$ в том смысле, что все корреляционные функции на масштабах $x \gg e^t a$ $(t > 0)$ в двух теориях совпадают. Компоненты векторного поля, генерирующего РГ, называются β-функциями, т. е.

$$dg^i = \beta^i(g)dt. \tag{1}$$

Отметим, что часть информации об ультрафиолетовом поведении ТП при преобразовании РГ с $t > 0$ теряется, поскольку в ТП рассмотрение корреляций на масштабах, меньших обрезания, неправомерно. Поэтому можно ожидать, что движение пространства Q под действием РГ носит характер "необратимого" процесса и сходно с временной эволюцией диссипативных систем. В данной статье мы ограничимся рассмотрением двумерной ТП и установим в этом случае следующие общие свойства РГ.

1. Существует функция $c(g) \geqslant 0$ такая, что

$$\frac{d}{dt}c \equiv \beta^i(g)\frac{\partial}{\partial g^i} c(g) \leqslant 0 \tag{2}$$

(подразумевается суммирование по повторяющимся индексам), причем равенство в (2) достигается только в неподвижных точках (НТ) РГ, т. е. при $g = g_*$: $\beta^i(g_*) = 0$.

2. НТ (здесь и далее подразумеваются "критические" НТ, в которых радиус корреляции бесконечен [1]) являются стационарными для $c(g)$, т. е. $\beta^i(g) = 0 \to \partial c / \partial g^i = 0$.

В критических НТ двумерная ТП обладает бесконечной конформной симметрией [3], причем соответствующие генераторы L_n; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ образуют алгебру Вирасоро

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{\tilde{c}}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \tag{3}$$

где числовой параметр $\tilde{c}$ ("центральный заряд") является важной характеристикой конформной ТП [3, 4] и принимает, вообще говоря, разные значения для разных НТ, т. е. $\tilde{c} = \tilde{c}(g_*)$.

3. Значение $c(g)$ в НТ g_* совпадает с соответствующим центральным зарядом в (3), т. е. $c(g_*) = \tilde{c}(g_*)$.

Доказательство этой "c-теоремы" основывается на условиях перенормируемости, положительности [5], трансляционной и вращательной симметриях ТП и некоторых специальных свойствах двумерной конформной ТП. Пространственные симметрии в локальной ТП обеспечиваются существованием локального тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}(x) = T_{\nu\mu}(x)$ удовлетворяющего уравнению $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$. Введем комплексные координаты $(z, \bar{z}) = (x^1 + ix^2,$

$x^1 - ix^2$) и обозначим $T = T_{zz}$, $\Theta = T_{z\bar{z}}$. Определим также скалярные локальные поля

$$\Phi_i(g, x) = \frac{\partial}{\partial g^i}\sigma(g, a, x). \qquad (4)$$

Точный смысл утверждения о перенормируемости ТП состоит в том, что при всех g поле Θ может быть разложено по базису (4)

$$\Theta = \beta^i(g)\Phi_i, \qquad (5)$$

где коэффициенты $\beta^i(g)$ те же, что и в (1). Определим функции

$$C(g) = 2z^4 \langle T(x)T(0)\rangle|_{x^2 = x_0^2}; \qquad (6а)$$

$$H_i(g) = z^2x^2 \langle T(x)\Phi_i(0)\rangle|_{x^2 = x_0^2}; \qquad (6б)$$

$$G_{ij}(g) = x^4 \langle \Phi_i(x)\Phi_j(0)\rangle|_{x^2 = x_0^2} \qquad (6в)$$

где $x_0 \gg a$ – произвольный масштаб ("точка нормировки"); далее мы полагаем $x_0 = 1$. Отметим, что вследствие условия положительности в ТП [5] симметрическая матрица $G_{ij}(g)$ положительно определена и может рассматриваться как метрика в Q. Комбинируя требование $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$ с (5) и уравнением Каллана – Симанчика [2], можно получить следующие соотношения

$$\frac{1}{2}\beta^i\partial_i C = -3\beta^i H_i + \beta^i\beta^k\partial_k H_i + \beta^k(\partial_k\beta^i)H_i; \qquad (7а)$$

$$\beta^k\partial_k H_i + (\partial_i\beta^k)H_k - H_i = -2\beta^k G_{ik} + \beta^j\beta^k\partial_k G_{ij} + \beta^j(\partial_i\beta^k)G_{jk} + \beta^j(\partial_j\beta^k)G_{ik}, \qquad (7б)$$

где $\partial_i = \partial/\partial g^i$. При выводе (7) использовано следующее выражение для матрицы $\gamma_i^j(g)$:

$$\gamma_i^j(g)\,\Phi_j \equiv \left(\frac{1}{2}a\frac{\partial}{\partial a} - \beta^k\frac{\partial}{\partial g^k}\right)\Phi_i = (\partial_i\beta^j)\Phi_j. \qquad (8)$$

Для функции

$$c(g) = C(g) + 4\beta^i H_i - 6\beta^i\beta^j G_{ij} \qquad (9)$$

из (7) следует

$$\beta^i\partial_i c = -12\beta^i\beta^j G_{ij}, \qquad (10)$$

откуда непосредственно получается утверждение 1. Утверждение 3 следует из (9) и определения "центрального заряда" $\tilde{c}(g_*)$ как числового коэффициента в корреляторе $\langle T(z)T(0)\rangle_{g_*} = z^{-4}\tilde{c}(g_*)/2$ [3]. Для доказательства 2 рассмотрим критическую НТ g_* и выберем систему координат в Q таким образом, чтобы $g_* = 0$ и

$$G_{ij}(g) = \delta_{ij} + 0(g^2). \qquad (11)$$

При этом векторы $\Phi_i(g_*, x)$ являются конформными полями и обладают некоторыми аномальными размерностями d_i. Вблизи точки $g_* = 0$ функцию $c(g)$ можно вычислить по теории возмущений, причем результат имеет вид

$$c(g) = \tilde{c}(g_*) - 6\epsilon_i g^i g^i + 2C_{ijk}g^ig^jg^k + O(g^4), \qquad (12)$$

где $2\epsilon_i = 2 - d_i$. Из (12), в частности, следует утверждение 2. Отметим еще, что в особом случае "мягких" возмущений, когда $|\epsilon_i| \ll 1$ можно показать, что коэффициенты C_{ijk} в (12) совпадают со структурными константами операторной алгебры конформной ТП g_* [3]
При этом для β-функций получается

$$\beta^i(g) = \epsilon_i g^i - \frac{1}{2}C_{ijk}g^jg^k + O(g^3). \qquad (13)$$

(В первом члене нет суммирования). Таким образом, с указанной точностью вблизи НТ выполняется соотношение

$$\beta^i(g) = -\frac{1}{12} G^{ij}(g) \frac{\partial}{\partial g^j} c(g) , \tag{14}$$

где $G^{ik} G_{kj} = \delta^i_j$.

Я благодарен В.А.Фатееву, А.А.Мигдалу и особенно А.М.Полякову за ценные замечания.

Литература

1. *Вильсон К., Когут Дж.* Ренормализационная группа и ϵ-разложение. М.: Мир, 1975.
2. *Ициксон К., Зюбер Ж.Б.* Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984.
3. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B.* Nucl. Phys., 1984, **B241**, 333.
4. *Friedan D., Qiu Z., Shenker S.* Phys. Rev. Lett., 1984, **52**, 1575.
5. *Глимм Дж., Джаффе А.* Математические методы квантовой теории поля. М.: Мир, 1984.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 мая 1986 г.