Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 1, стр. 12 – 15 *10 июля 1986 г.*

О МНОЖЕСТВЕННОМ ДРОБЛЕНИИ ВОЛНОВЫХ СТРУКТУР В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Н.А.Жарова, А.Г.Литвак, Т.А.Петрова, А.М.Сергеев, А.Д.Юнаковский

Обнаружен новый тип самовоздействия волновых полей в нелинейных средах.

Одним их эталонных уравнений теории нелинейных волн является нелинейное уравнени[е] Шредингера гиперболически-параболического типа [1]

$$-iE_t + E_{xx} + E_{yy} - E_{zz} + E|E|^2 = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение описывает самовоздействие широкого класса волн, поверхности волновых векторов у которых имеют седловую точку (например, гравитационные волны на глубокой воде [2,3], плазменные колебания в замагниченной плазме – верхнегибридные [4], циклотронные [5]). В отличие от известного процесса трехмерного скалярного коллапса нелинейная динамика волн с таким законом дисперсии может приводить к последовательному рождению все более мелкомасштабных волновых структур.

Рассмотрим динамику отдельного локализованного в пространстве волнового пакета $E(x, y, z)$. В рамках уравнения (1) аксиально симметричные распределения коллапсируют, если энергия, приходящаяся на единицу длины ячейки $w = \int |E|^2 dxdy$ больше критической, а продольная модуляция является фактором, препятствующим схлопыванию. Можно показать, используя известные интегралы (1), что средний квадрат продольного размера пакета $\overline{b^2} = \int z^2 |E|^2 dxdydz / \int |E|^2 dxdydz$ является монотонно растущей функцией времени

$$(\overline{b^2})_{tt} = 2\int (4|E_z|^2 + |E|^4) dxdydz / \int |E|^2 dxdydz. \tag{2}$$

Соотношение (2), однако, не исключает возможности возникновения локальных сингулярностей за счет поперечного схлопывания на конечных интервалах времени.

Для ответа на этот вопрос исследуем асимптотическую устойчивость двумерного радиально симметричного коллапса по отношению к пространственной модуляции вдоль z [1)]. Для этого перейдем из лабораторной в систему координат, всесторонне сжимающуюся к некоторой точке ($R = 0$, $z = z_0$) (выберем в ней $z_0 = 0$). Производя соответствующее преобразование поля по закону

$$E(x, y, z, t) = \frac{1}{a} u\left(\frac{R}{a}, \frac{z}{a}, \int \frac{dt}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{i a_t R^2}{4a}\right), \tag{3}$$

получим из (1) уравнение

$$\hat{L}u = -iu_\tau + \Delta_\xi u - u_{\eta\eta} + u|u|^2 = -u\frac{\xi^2}{4}\left(\frac{2a_\tau^2}{a^2}\tau - \frac{a_{\tau\tau}}{a}\right) - i\eta u_\eta \frac{a_\tau}{a}. \tag{4}$$

Здесь $\xi = R/a$, $\eta = z/a$, $a = a(\tau(t))$, $\tau = \int (dt/a^2)$ – новая шкала отсчета времени, для которой момент образования особенности отнесен в бесконечность. Из теории самофокусировки известно [7], что однородное по z распределение схлопывается по закону

$$a \sim \sqrt{\frac{t_0 - t}{-\ln(t_0 - t)}}, \tag{5}$$

поэтому члены в правой части (4) асимптотически ($\sim 1/|\ln(t_0 - t)|$) стремятся к нулю. Проведенный в рамках уравнения $\hat{L}u = 0$ анализ показывает, что основная ("таунсовская" [8]) мода поперечного коллапса $u = V_0(\xi)\exp(-i\tau)$ оказывается неустойчивой по отношению к возмущениям амплитуды $V_0(\xi)$ вида $V = A(\xi)\exp(\gamma\tau - i\kappa\eta)$. Максимальный инкремент $(\mathrm{Re}\gamma)_{max} \simeq 0{,}75$ достигается при $\kappa_* \simeq 0{,}6$, а в предельном случае длинноволновой модуляции ($\kappa \to 0$) справедлива зависимость $\mathrm{Re}\gamma \sim \sqrt{\kappa}$, найденная в работе [9].

Полученные сведения о неустойчивости можно использовать для исследования динамики достаточно вытянутых в z-направлении структур. Если же в процесс самосжатия захватывается ячейка с соотношением поперечного и продольного масштабов $a_0/b_0 \gtrsim 0{,}1$ $\left(\kappa_0 \simeq \frac{2\pi a_0}{b_0} < \kappa_*\right)$, включается другой механизм, препятствующий образованию особенности. Предположим, что в каждом сечении (по z) фокусировка распределения поля происходит неза-

---

1) Устойчивость радиально симметричного "сверхзвукового" коллапса волн в плазме рассматривалась впервые в работе [6].

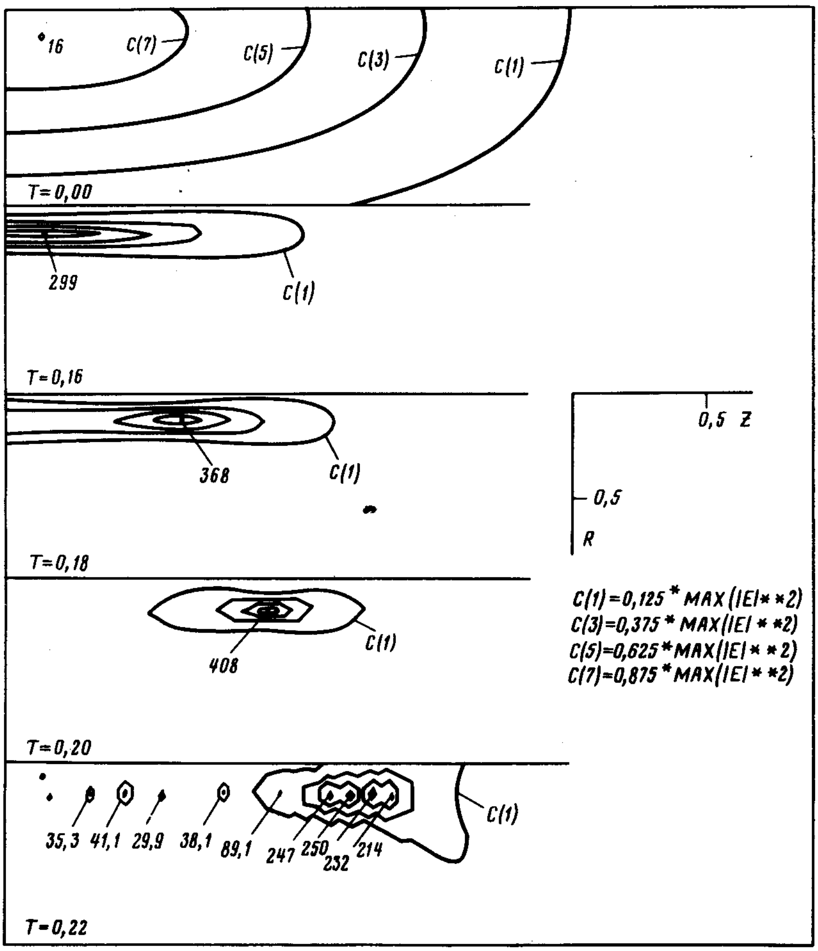
висимо. Замена переменных типа (3)

$$E(x, y, z, t) = \frac{1}{a(z, t)} u\left(\frac{R}{a(z, t)}, \tau(z)\right) \exp\left(-\frac{i a_t R^2}{4a(z, t)}\right),$$

которая представляет собой обобщенное линзовое преобразование [10] с параметром a, зависящим от z, приводит нас к уравнению

$$-iu_\tau + \mu u_\tau + \Delta_\xi u + u|u|^2 = 0, \qquad (6)$$

где $\mu = a_0^2/2b_0^2$. Уравнение (6) написано для сечения z_0, соответствующего максимуму поля $(E_z(z = z_0) = 0)$, без учета асимптотически исчезающих (при $\tau \to \infty$) членов. "Таунсовская" мода в (6) затухает при $\mu \neq 0$ за счет "вытекания" энергии поля из максимума в стороны по z. Нетрудно видеть, что это обстоятельство препятствует сжатию неоднородного по z распределения как целого и приводит (аналогично двумерному случаю [11]) к рождению двух новых мелкомасштабных сгустков поля.



Эволюция вторичных структур протекает по сходному с описанным выше сценарию. Возможность поперечной самофокусировки для них объясняется тем, что в процессе дробления исходного распределения имеет место локальное подрастание амплитуды поля в образующихся сгустках за счет перераспределения плотности энергии колебаний в продольном направлении. Следовательно, в отличие от эффекта трехмерного схлопывания колебаний в среде с положительной дисперсией, в рассматриваемой ситуации элементарный акт нелинейной динамики поля состоит из последовательности процессов поперечного сжатия и продольного дробления пространственной структуры, в результате чего в системе рождаются все более мелкомасштабные сгустки поля.

Описанная картина самовоздействия подтверждается численными исследованиями динамики локализованных распределений в уравнении (1) для случая аксиальной симметрии и пакетов с начальной гауссовой формой поля

$$E\ (\ r, z, 0) = A \exp\left(-\ \frac{R^2}{2a^2}\ -\ \frac{z^2}{2b^2}\right)\ .$$

На рисунке изображены линии уровня функции $|E(R, z, t)|^2$ и ее локальные максимумы в последовательные моменты времени для параметров $A = 4$, $a = 1$, $b = 4$. В приведенном варианте расчета отчетливо прослеживаются 2 стадии измельчения пространственной структуры поля.

Вопрос о полном числе актов дробления представляется достаточно сложным. По-видимому, оно является конечным для эволюции локализованного пакета в неограниченной области пространства, поскольку средняя плотность энергии на единицу длины в продольном направлении с течением времени уменьшается (см. (2)). Как показывает численный эксперимент, асимптотическое (при $t \to \infty$) поведение решения характеризуется в этом случае дефокусировкой поля по всем направлениям.

Другой оказывается ситуация при исследовании самовоздействия в системе с периодическими (по оси z) граничными условиями, что соответствует исходному возбуждению значительного числа взаимодействующих между собой ячеек турбулентности. Ограниченность пространства эволюции препятствует дефокусировке распределения в целом и приводит к бесконечному повторению актов сжатия и дробления на все более мелкомасштабном уровне.

Литература

1. *Литвак А.Г., Таланов В.И.* Изв. высш. уч. зав., сер. Радиофизика, 1967, **10**, 539.
2. *Захаров В.Е.* ПМТФ, 1968, **9**, 86.
3. *Юэн Г., Лэйк Б.* Кн.: "Солитоны в действии", М., 1981, с. 103.
4. *Литвак А.Г., Сергеев А.М.* Сб. "Высокочастотный нагрев плазмы", Горький, 1983, с. 324.
5. *Myra J.R., Liu C.S.* Phys. Fluids, 1980, **23**, 2258.
6. *Малкин В.М.* ЖЭТФ, 1984, **87**, 433.
7. *Фрайман Г.М.* ЖЭТФ, 1985, **88**, 390.
8. *Chiao R.J., Garmire E., Townes H.* Phys. Rev. Lett., 1964, **13**, 469.
9. *Захаров В.Е., Рубенчик А.М.* ЖЭТФ, 1973, **65**, 997.
10. *Таланов В.И.* Письма в ЖЭТФ, 1971, **11**, 303.
11. *Литвак А.Г., Петрова Т.А., Сергеев А.М., Юнаковский А.Д.* Физика плазмы, 1983, **9**, 495.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
4 мая 1986 г.