Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 1, стр. 32 – 34 10 июля 1986 г.

О СКРЫТОЙ СУПЕРСИММЕТРИИ He^3-A

С.С.Рожков

Показано, что связанные состояния в He^3-A, соответствующие суперсимметричному минимуму потенциала, образованного текстурой орбитального вектора $\mathbf{l}$, обладают "зеркальным вырождением" : в состоянии с нулевой энергией находятся частицы со спином "вправо" и "влево", в спектре которых отсутствует инверсионная симметрия.

В работе Хо, Фулко, Шриффера и Вильчека [1] было рассмотрено влияние орбитального солитона на спектр ферми-возбуждений в A-фазе He^3, и было найдено, что спектр связанных состояний с нулевой энергией не обладает зеркальной симметрией относительно плоскости, перпендикулярной доменной стенке. Аналогичный результат был получен в работах [2, 3]. В данной работе спектр ферми-возбуждений в He^3-A при наличии текстуры орбитального вектора $\mathbf{l}$ исследуется на языке суперсимметричной квантовой механики [4]. Обнаружено "зеркальное вырождение" (см. ниже) нулевых мод.

Их уравнения Горькова для сверхтекучей жидкости с триплетным спариванием следует задача на собственные значения $H\chi = E\chi$, где $\chi = \begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix}$ (см. [1 - 3]), в которой гамильтониан H для He^3-A можно записать в форме

$$H = \frac{\Delta_0}{p_F}\gamma_j(\mathbf{e}^j\cdot\hat{\mathbf{p}} - \frac{i}{2}\nabla\cdot\mathbf{e}^j) + \gamma_3\xi(\hat{\mathbf{p}}), \tag{1}$$

где $\vec{\Delta} = \mathbf{e}^1 + i\mathbf{e}^2$ – орбитальная часть параметра порядка (спиновые переменные фиксированы), $\vec{\gamma} = \{\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3\}$ (σ_j – матрицы Паули), $\xi(\hat{\mathbf{p}}) = \hat{\mathbf{p}}^2/2m - \mu$, Δ_0 – щель, p_F – фермиевский импульс, μ – химический потенциал, $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$.

Рассмотрим twist-текстуру орбитального вектора $\mathbf{l} = \mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2$:

$$\mathbf{l}(z) = l_x(z)\hat{\mathbf{x}} + l_y(z)\hat{\mathbf{y}}, \tag{2}$$

для которой

$$\mathbf{e}^1 = -l_y(z)\hat{\mathbf{x}} + l_x(z)\hat{\mathbf{y}}, \qquad \mathbf{e}^2 = \hat{\mathbf{z}}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{e}^j = 0. \tag{3}$$

Так как $\mathbf{e}^j$ зависят только от одной координаты z, то импульс $\mathbf{p}_\perp = \{p_x, p_y\}$ является константой движения и $\chi = \exp\{i(p_x x + p_y y)\}\Phi(z)$. В этом случае гамильтониан H и уравнение $H\chi = E\chi$ примут вид

$$H = \frac{\Delta_0}{p_F}[-\sigma_2\hat{p}_z + \sigma_1 W(z)] + \sigma_3\xi(\hat{\mathbf{p}}), \tag{4}$$

$$(-\sigma_2\hat{p}_z + \sigma_1 W + \sigma_3\kappa - \epsilon)\Phi = 0. \tag{5}$$

Здесь

$$W = (\mathbf{l}\times\mathbf{p})_z, \qquad \hat{p}_z = -id/dz, \qquad \epsilon = (p_F/\Delta_0)E,$$
$$\kappa = \frac{p_F}{\Delta_0}\left(\frac{\hat{p}_z^2}{2m} + \xi_{\mathbf{p}_\perp}\right), \qquad \xi_{\mathbf{p}_\perp} = \frac{\mathbf{p}_\perp^2}{2m} - \mu. \tag{6}$$

Будем считать, что характерный масштаб текстуры $L_z \gg p_F^{-1}$, тогда $\kappa \simeq \kappa_{\mathbf{p}_\perp} \equiv (p_F/\Delta_0)\xi_{\mathbf{p}_\perp}$ и уравнение (5) преобразуется в следующее уравнение

$$\mathcal{H}^2\varphi \equiv \left[-\frac{d^2}{dz^2} + W^2 + \kappa^2_{\mathbf{p}_\perp} + \sigma_3\frac{dW}{dz}\right]\varphi = \epsilon^2\varphi, \tag{7}$$

где $\mathcal{H}$ – гамильтониан, соответствующий (5) в случае $\kappa = \kappa_{\mathbf{p}_\perp}$. Решения (5) строятся из решений (7): $\Phi = (\mathcal{H} + \epsilon)\varphi$. Отметим, что к (7) сводится уравнение Дирака, записанное в форме уравнения второго порядка для вектор-потенциала $\mathbf{A}(z) = \{A_x(z), 0, 0\}$ и $\mathbf{E} = 0$ [5]. В [5] уравнение (7) решено для некоторых видов потенциала $\mathbf{A}(z)$ (см. также [6]).

Для состояний на поверхности Ферми ($\xi_{p_\perp} = 0$) уравнение (7) представляет собой уравнение суперсимметричной квантовой механики и анализировалось в [4]. Однако в данной задаче $W' = \mathrm{rot}\,\mathbf{l}\cdot\mathbf{p} = \partial_z l_x p_y$, так что в (7) имеется дополнительный параметр, p_y, который может менять знак. Пусть W имеет один нуль, тогда потенциал W^2 имеет единственный суперсимметричный минимум с нулевой энергией. Наиболее простая ситуация отвечает выбору $W = p_x + p_y qz$ $(q > 0)$, когда уравнению (7) соответствует гамильтониан $H_0 = \hat{p}_z^2 + \lambda^2(z - z_0)^2 + \lambda\sigma_3$, где $\lambda \equiv W' = p_y q$, $z_0 = - p_x/\lambda$. Энергия нулевых колебаний осциллятора равна $|\lambda|$, а собственные значения оператора $\lambda\sigma_3$ равны $\pm|\lambda|$. Если, например, $p_y > 0$, то минимум энергии основного состояния равен $|\lambda| - \lambda = 0$. Изменение знака p_y соответствует выбору собственного значения оператора $\lambda\sigma_3$, равного $\lambda = -|\lambda|$, т. е. перевороту "спина", а также замене координаты центра осциллятора z_0 на $-z_0$.

Таким образом, состояние с нулевой энергией в He^3-A (основное состояние для H_0) обладает своеобразным "зеркальным вырождением": для определенного знака p_x (например, $p_x > 0$) частицы со спином "вправо" ($p_y > 0$) располагаются на отрицательной полуоси z, а частицы со спином "влево" ($p_y < 0$) – на положительной полуоси z. Исходя из соображений симметрии можно предположить, что суммарный вклад в ток нулевых мод равен нулю, однако вопрос о токе требует отдельного рассмотрения.

Для полноты описания найдем спектр и собственные функции (5) для $W = \lambda(z - z_0)$. В этом случае (5) вполне аналогично уравнению Дирака для электрона в постоянном магнитном поле (см. [5] и [7]). Но, как уже было замечено, есть одно существенное отличие, состоящее в удвоении состояний данной задачи вследствие ее зависимости от знака λ. В результате собственные значения уравнения (5) имеют вид

$$\epsilon_n = \pm [\kappa_{p_\perp}^2 + |\lambda|(2n + 1 + \mathrm{sgn}(\lambda)s)]^{1/2} \tag{8}$$

(где $s = \pm 1$ – собственные значения оператора σ_3), а собственные функции $\Phi_{s,n}^{\mathrm{sgn}\,\lambda}(\zeta)$ ($\zeta = z - z_0$) есть

$$\Phi^+_{1,\,n-1} = \frac{1}{G_+}\begin{pmatrix}(\epsilon_n + \kappa_{p_\perp})\,\psi_{n-1}\\ \sqrt{2|\lambda|n}\,\psi_n\end{pmatrix}, \qquad \Phi^+_{-1,\,n} = \frac{1}{G_-}\begin{pmatrix}\sqrt{2|\lambda|n}\,\psi_{n-1}\\ (\epsilon_n - \kappa_{p_\perp})\,\psi_n\end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\Phi^-_{1,\,n-1} = \frac{1}{G_-}\begin{pmatrix}-\sqrt{2|\lambda|n}\,\psi_n\\ (\epsilon_n - \kappa_{p_\perp})\psi_{n-1}\end{pmatrix}, \qquad \Phi^-_{-1,\,n} = \frac{1}{G_+}\begin{pmatrix}(\epsilon_n + \kappa_{p_\perp})\psi_n\\ -\sqrt{2|\lambda|n}\,\psi_{n-1}\end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $\psi_n(\zeta)$ – собственные функции осциллятора ($\psi_{-1} = 0$), $G_\pm = [2\epsilon_n(\epsilon_n \pm \kappa_{p_\perp})]^{1/2}$. Таким образом, состояние с $n = 0$ двукратно вырождено, а остальные уровни обладают четырехкратным вырождением (для каждого из двух знаков ϵ_n).

Интересной особенностью обладает состояние с $n = 0$, для которого

$$\Phi^-_{-1,\,0} = \begin{pmatrix}\psi_0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \Phi^+_{-1,\,0} = \begin{pmatrix}0\\ \psi_0\end{pmatrix}, \tag{11}$$

причем спектр $E_0 = |\xi_{p_\perp}|$ ($E_0 = -|\xi_{p_\perp}|$) оказывается асимметричным: $\xi_{p_\perp} > 0$ и $\xi_{p_\perp} < 0$ ($\xi_{p_\perp} < 0$ и $\xi_{p_\perp} > 0$) для $\Phi^-_{-1,\,0}$ и $\Phi^+_{-1,\,0}$ соответственно (в отличие от результатов работ [1-3]). Для $\xi_{p_\perp} = 0$ эта особенность спектра отмечалась выше.

В заключение отметим, что в уравнении (7) для $\kappa_{p_\perp} \neq 0$ суперсимметрия нарушена. В этом случае можно ввести эрмитовы заряды $Q_1 = [\sigma_1\hat{p}_z + \sigma_2(W + \kappa_{p_\perp})]/\sqrt{2}$ и $Q_2 = [\sigma_2\hat{p}_z - \sigma_1(W - \kappa_{p_\perp})]/\sqrt{2}$, которые удовлетворяют следующей алгебре

$$Q_1^2 + Q_2^2 = H_\kappa, \qquad \{Q_1, Q_2\} = 2\kappa_{p_\perp}\hat{p}_z, \tag{12}$$

где $H_\kappa = \hat{p}_z^2 + W^2 + \kappa_{\mathbf{p}_\perp}^2 + \sigma_3 W'$ – гамильтониан, соответствующий уравнению (7). В случае, когда $\kappa_{\mathbf{p}_\perp} = 0$ (можно, конечно в (7) сделать замену $\epsilon^2 - \kappa_{\mathbf{p}_\perp}^2 \to \epsilon^2$), алгебра (12) переходит в алгебру суперсимметричной квантовой механики: $\{Q_i, Q_j\} = \delta_{ij} H_0$, $[Q_i, H_0] = 0$, а число состояний с нулевой энергией равно числу нулей функции $W(z)$ (см. [4]).

Литература

1. *Ho T.L., Fulco J.R., Schrieffer J.R., Wilczek F.* Phys. Rev. Lett., 1984, **52**, 1524; 1985, **54**, 1462.
2. *Combescot R., Dombre Y.* Phys. Rev. Lett., 1985, **54**, 1461; Phys. Rev., 1986, **B33**, 79.
3. *Воловик Г.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1985, **42**, 294.
4. *Witten E.* Nucl. Phys., 1981, **B185**, 513.
5. *Stanciu G.N.* Phys. Lett., 1966, **23**, 232.
6. *Gamonal R.* Phys. Rev., 1985, **D32**, 2846.
7. *Johnson M.H., Lippman B.A.* Phys. Rev., 1949, **76**, 828.

Институт физики
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
22 апреля 1986 г.