Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 1, стр. 55 – 57 *10 июля 1986 г.*

О ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ С ЧЕТНОЙ И НЕЧЕТНОЙ СКОБКАМИ ПУАССОНА И О ДУАЛЬНОСТИ ИХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Д.В.Волков, А.И.Пашнев, В.А.Сорока, В.И.Ткач

На примере суперсимметричной механики Виттена доказывается существование гамильтоновых систем с четной и нечетной скобками Пуассона.

Из трех вариантов известных в настоящее время скобок Пуассона, двух четных и одной нечетной относительно грассмановой градуировки канонических переменных [1], нечетная скобка Пуассона, канонические переменные которой имеют противоположную грассманову градуировку, представляется более фундаментальной как следствие того, что ее градуировка является нетривиальной [2]. Изучение различных физических применений нечетной скобки Пуассона представляет несомненный интерес.

В настоящей статье мы хотим обратить внимание на то, что гамильтонова система с равным числом четных и нечетных канонических переменных допускает одновременно введение четной и нечетной скобок Пуассона. При использовании скобочных операций различной градуировки уравнения для канонических переменных не изменяются, а интегралы движения с противоположной грассмановой градуировкой становятся дуальными, превращаясь друг в друга при переходе к скобке Пуассона с противоположной градуировкой.

Потребуем, чтобы одни и те же уравнения динамической системы, содержащей четные x^a и нечетные x^α канонические переменные, воспроизводились четной скобкой Пуассона $\{,\}_0$ с четным гамильтонианом H и посредством нечетной скобки Пуассона $\{,\}_1$ с нечетным гамильтонианом $\overline{H}$, т. е.

$$\dot{X}^A = \{X^A, H\}_0 = \{X^A, \overline{H}\}_1 \tag{1}$$

где $X^A = (x^a, x^\alpha)$. Соотношение (1) эквивалентно уравнениям

$$\overline{\omega}_{AB}(X)\,\omega^{BC}\partial_C H = \partial_A \overline{H}, \tag{2}$$

которые определяют $\overline{H}$ и коэффициенты замкнутой нечетной внешней формы

$$\overline{\omega}_{AB}(X) = \partial_A \varphi_B - (-1)^{AB}\partial_B \varphi_A , \tag{3}$$

соответствующей нечетной скобке при заданных H и четной канонической форме ω^{AB}, где φ_A являются коэффициентами нечетной формы Лиувилля.

В качестве иллюстрации определим решение уравнений (2) для случая суперсимметричной механики Виттена [3] с гамильтонианом

$$H = H_0 + i\eta^1\eta^2 W'(q), \tag{4}$$

где $x^a = (q, p)$ и $x^\alpha = (\eta^1, \eta^2)$, а $H_0 = [p^2 + W^2(q)]/2$. Для гамильтониана (4) сохраняющимися величинами являются также фермионный заряд $F = i\eta^1\eta^2$ и суперзаряды $Q_1 = p\eta^1 - W\eta^2$, $Q_2 = p\eta^2 + W\eta^1$, образующие на четной скобке Пуассона супералгебру

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_0 = -2i\delta_{\alpha\beta}H, \quad \{F, Q_\alpha\}_0 = \epsilon_{\alpha\beta}Q_\beta . \tag{5}$$

Вследствие уравнений движения (1) величины H, F, Q_1 и Q_2, а также произвольные функции от них являются интегралами движения также и относительно нечетной скобки $\{,\}_1$ с гамильтонианом $\overline{H}$. Уравнения (2) с гамильтонианом (4) определяют $\overline{H}$ и $\overline{\omega}_{AB}$ с точностью до шести произвольных функций, зависящих от величины H_0. Используя этот произвол, можно потребовать, чтобы

$$\overline{H} = Q_1 \tag{6}$$

и остальные три независимые сохраняющиеся относительно $\overline{H}$ на нечетной скобке величины $\overline{F}, \overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ были бы линейны относительно интегралов H, F, Q_1 и Q_2 и образовывали бы на нечетной скобке супералгебру

$$\{\overline{Q}_\alpha, \overline{Q}_\beta\}_1 = -2i\delta_{\alpha\beta}\overline{H}, \qquad \{\overline{F}, \overline{Q}_\alpha\}_1 = \epsilon_{\alpha\beta}\overline{Q}_\beta ,$$

совпадающую с (5). Тогда интегралы движения $\overline{F}, \overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ будут следующим образом связаны с сохраняющимися величинами механики Виттена с гамильтонианом (4):

$$\overline{F} = \frac{1}{2i}Q_2 , \quad \overline{Q}_1 = H , \qquad \overline{Q}_2 = i(2F - H). \tag{7}$$

При этом с переходом к нечетной скобке суперзаряды Q_1, Q_2 приобретают смысл нечетного гамильтониана $\overline{H}$ и нечетного фермионного заряда $\overline{F}$, а роль суперзарядов $\overline{Q}_1$ и $\overline{Q}_2$ играют линейные комбинации гамильтониана Виттена (4) и фермионного заряда F. Отметим, что в силу симметрии между зарядами Q_1 и Q_2 в механике Виттена можно было бы в качестве нечетного гамильтониана $\overline{H}$ взять Q_2.

При дополнительных условиях (6), (7) уравнения (2) имеют для коэффициентов φ_A нечетной формы Лиувилля следующее решение:

$$\varphi_q = (1 - \alpha_2 W)\eta^1 + \alpha_1 W\eta^2 ,$$

$$\varphi_p = \frac{1}{W'}[(1 + \alpha_1 p)\eta^2 - \alpha_2 p\eta^1],$$

$$\varphi_{\eta^1} = i\eta^1\eta^2\alpha_2 , \qquad \varphi_{\eta^2} = - i\eta^1\eta^2\alpha_1$$

где

$$\alpha_1 = W'\left[WJ(H_0, q) + \frac{p}{H_0}\right] - \frac{1}{p} ,$$

$$\alpha_2 = W'\left[pJ(H_0, q) - \frac{W}{H_0}\right], \qquad J(H_0, q) = \int_{q_0}^{q} [2H_0 - W^2(q')]^{-3/2} dq' .$$

Таким образом, мы показали наличие для гамильтоновых систем Виттена определяемой внутренним образом нечетной формы Лиувилля и соотношений дуальности (6), (7) между четными и нечетными интегралами движения, в том числе между гамильтонианом и суперзарядом. Соотношения дуальности между гамильтонианом и суперзарядом представляют особый интерес для релятивистских систем, которые будут рассмотрены в отдельной работе.

Литература

1. *Березин Ф.А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: МГУ, 1983, *Лейтес Д.А.* Теория супермногообразий. Петрозаводск, 1983.
2. *Волков Д.В.* Письма в ЖЭТФ, 1983, 38, 508; *Волков Д.В., Сорока В.А., Ткач В.И.* Кн.: Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля, Протвино, 1984, т. 1, с. 48.
3. *Witten E.* Nucl. Phys., 1981, **B188**, 513.

Поступила в редакцию
17 мая 1986 г.