

ПЕРКОЛЯЦИОННЫЕ МОДЕЛИ С БЕСПОРЯДКОМ

С.П.Обухов

Для задачи направленного протекания с беспорядком вычислены критические индексы в первом $4 - \epsilon$ приближении. Показано, что для слоистых неупорядоченных систем перколяционный переход является переходом бесконечного рода.

Перколяционные модели обычно используются для описания свойств проводимости, протекания, связности в неупорядоченных системах. В этих моделях уже с самого начала заложен сильнейший локальный беспорядок (например, в перколяционной задаче связей это наличие или отсутствие связей между соседними узлами решетки). Если ввести дополнительный беспорядок в такую систему (решать задачу связей на решетке с дефектами), то это изменит только порог протекания системы, но не ее критические свойства вблизи порога. Простейшие оценки показывают, что для того, чтобы изменить класс универсальности задачи протекания, беспорядок должен быть нелокальным.

Задача протекания может также применяться для пространственно-временного описания случайных процессов в возбужденных средах (так называемая задача направленного протекания ¹, см. обзоры ²⁻⁴). В реальных биологических средах, нейронных и логических сетях, которые можно описывать с помощью задачи направленного протекания, всегда присутствуют дефекты и пространственная неоднородность, неизменные на протяжении всего времени развития процесса. При пространственно-временном описании системы с точечными дефектами, теория является нелокальной во времени. Как показано в работе ⁵ с помощью машинного моделирования, критические индексы системы с дефектами существенно отличаются от индексов однородной задачи.

Мы рассмотрим простейшую модель, в которой каждый узел на d -мерной пространственной решетке может находиться в двух различных состояниях: основном и возбужденном. Если в момент времени t узел с номером i возбужден, то в следующий момент $t+1$ он может перейти в возбужденное состояние своих ближайших соседей, каждого с независимой вероятностью p_i , и с такой же вероятностью может сам остаться возбужденным. Будем считать, что неоднородность системы проявляется в неоднородности p_i : $p_i = p + \Delta_i$, $\langle \Delta_i \rangle = 0$, $\langle \Delta_i \Delta_j \rangle = s^2 \delta_{ij}$, где p — среднее значение p_i . Если p превышает критическое значение p_c , то возбуждение одного узла может привести к незатухающему во времени стохастическому процессу. Описание такого процесса сводится к задаче протекания на $d+1$ -мерной пространственно-временной решетке, где узлы соединены случайными связями, ориентированными в направлении возрастания времени. Для учета неоднородности распределения случайных связей можно воспользоваться диаграммной техникой для однородной задачи, развитой в ¹.

Простейшая поправка к корреляционной функции задачи протекания, связанная с неоднородностью, показана на рис. а. Здесь сплошным линиям сопоставляются затравочные корреляционные функции задачи направленного протекания, которые в импульсном представлении имеют вид $G(k, \omega) = (k^2 - i\omega + \tau)^{-1}$, $\tau \propto p_c - p$, пунктирной линии — множитель $\sigma(\omega) / 2\pi$, вершине взаимодействия с примесью — множитель s . Заметим, что при $\tau \rightarrow 0$ поправка рис. а имеет точно такую же особенность, что и первая поправка к $G(k, \omega)$ в однородной задаче, рис. б, см. также ¹. Действительно, в петле диаграммы рис. б на одну корреляционную функцию больше, но в ней необходимо провести дополнительное интегрирование по частоте, которое отсутствует в предыдущей поправке из-за множителя $\delta(\omega)$. Рассмотрение более сложных диаграмм показывает, что их учет сводится к введению перенормированной тройной вершины (простейшие поправки изображены на рис. в, г) и перенормированной вершины взаимодействия с примесью (рис. д, е).

Уравнения ренорм-группы для обеих перенормированных вершин \tilde{g} и \tilde{s} имеют вид

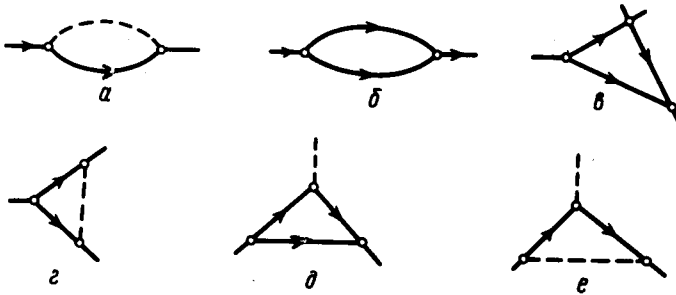
$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi} = \tilde{g} \left\{ \frac{1}{4} (\epsilon - 2\eta_{\perp} - \eta_{\parallel}) - \frac{k_4 \tilde{g}^2}{4} + \frac{3k_4 \tilde{s}^2}{2} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \xi} = \tilde{s} \left\{ \frac{1}{4} (\epsilon - 2\eta_{\perp}) - \frac{k_4 \tilde{g}^2}{8} + \frac{k_4 \tilde{s}^2}{2} \right\},$$

где $\eta_{\parallel} = -k_4 \frac{\tilde{g}^2}{8} + k_4 s^2$, $\eta_{\perp} = -\frac{k_4 \tilde{g}^2}{16}$, $k_4 = (32\pi^2)^{-1}$, $\xi = -\ln|p_c - p|$, $\epsilon = 4 - d$.

Уравнения (1) имеют устойчивую фиксированную точку:

$$\tilde{g}_f^2 = 8k_4^{-1}\epsilon, \quad \tilde{s}_f^2 = k_4^{-1}\epsilon, \quad (\tilde{g}_f^2 = \frac{4}{3}k_4^{-1}\epsilon). \quad (2)$$



Здесь и ниже в скобках указываются величины, характеризующие однородную задачу направленного протекания ($s \equiv 0$) ¹.

Приведем, наконец, выражения для основных критических индексов задачи неоднородного направленного протекания — индексов продольной и поперечной корреляционной дли-

ны, индекса плотности бесконечного кластера, и индекса восприимчивости (среднего размера кластера):

$$\begin{aligned} \nu_{\parallel} &= 1 + \frac{\epsilon}{2}, & \nu_{\perp} &= \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{8}, & \beta &= 1 + O(\epsilon^2), & \gamma &= 1 + \frac{\epsilon}{2}, \\ \left(\nu_{\parallel} &= 1 + \frac{\epsilon}{4}, & \nu_{\perp} &= \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{16}, & \beta &= 1 - \frac{\epsilon}{6}, & \gamma &= 1 + \frac{\epsilon}{6} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что величина \tilde{s}^2 входит в уравнения (1) только со знаком "+" и если бы коэффициенты при \tilde{s}^2 были несколько большими, то система (1) была бы неустойчивой. Близость к неустойчивости сказывается в более сильной зависимости \tilde{g}_f^2 и критических индексов от ϵ по сравнению с однородной задачей. Это качественно согласуется с аномально большими значениями критических индексов, полученных при машинном моделировании неоднородной задачи⁵ в размерности $d=1$ и $d=2$. Количественное соответствие величин критических индексов (3) с экспериментальными значениями вероятно возможно только при $d=3$.

В заключение мы рассмотрим кратко вопрос о роли нелокального беспорядка в обычной задаче протекания с ненаправленными связями. Для этого мы сравним поправки рис. а, б для случая обычного протекания с затравочной корреляционной функцией $G(k) = (k^2 + \tau)^{-1}$. Чтобы в пределе $\tau \rightarrow 0$ вклад от диаграммы рис. б был одного порядка с вкладом от диаграммы рис. а, необходимо, чтобы коррелятор беспорядка имел вид $1/k^2$ или чтобы он содержал δ -функции, уменьшающие на два число интегрирований в петле диаграммы рис. б. Примером, иллюстрирующим вторую возможность, является слоистая система, в которой плотность случайных связей случайно меняется от слоя к слою. Такой тип нелокального беспорядка неизбежно должен учитываться в моделях описывающих проницаемость стратифицированных геологических объектов, например, месторождений нефти и газа, или в моделях, описывающих свойства слоистых композиционных материалов.

Примечательно, что основной вклад в измеряемые величины от неоднородности в слоистой системе возникает не по теории возмущений, а имеет "инстантонный" характер. Этот вклад возникает из-за экспоненциально редких областей системы, в которых оказываются рядом несколько слоев с плотностью случайных связей выше средней, достаточной для образования двумерного протекания по этим слоям. Пусть, например, средняя плотность связей p меньше p_c , но плотность связей в каждом слое случайно меняется как $p \pm \Delta$ и $p + \Delta > p_c$ (p_c — критическая концентрация связей в однородной системе). Тогда для того, чтобы возникло двумерное протекание, необходимо, чтобы рядом оказалось несколько слоев с повышенной концентрацией связей $p + \Delta$. Толщина этой стопки слоев должна быть порядка радиуса корреляции однородной задачи протекания: $r_c \sim (p + \Delta - p_c)^{-\nu}$, $\nu \simeq 0,8$ при $d=3$. При $r_c \gg 1$ такое случайное скопление слоев является экспоненциально редким $\sim \exp(-|p + \Delta - p_c|^{-\nu})$. В бесконечной системе перколяционный переход происходит в точке $p = p_c - \Delta$ (а не в точке $p = p_c + O(\Delta^2)$, как было бы по теории возмущений) и в этой точке все средние измеряемые величины являются бесконечно дифференцируемыми (например, плотность бесконечного кластера). Таким образом, это переход не второго рода, как в однородной задаче протекания, а бесконечного.

Я благодарен Дж.Карди (J.Cardy) и Э.И.Рашба за обсуждение и критические замечания.

Литература

1. Обухов С.П. Материалы VII Зимней школы ЛИЯФ, Ленинград, 1979; *Obukhov S.P. Physica*, 1980, A101, 145.
2. Kinzel W. In *Percolation structures and Processes*, ed. by G.Deutsch, R.Zallen and J. Adler (Hilger, Bristol 1983), chap. 18.
3. Schulman L.S., Seiden P.E. *ibid* chap. 12.

4. *Darrett R.* Ann. Prob., 1984, 12, 999.

5. *Noest A.* Phys. Rev. Lett., 1986, 57, 90.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау

Академии наук СССР

Поступила в редакцию

12 ноября 1986 г.

После переработки

30 декабря 1986 г.