

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА СЛУЧАЙНОЙ ПЛАНАРНОЙ РЕШЕТКЕ

B.A. Казаков

Показано, что модель Изинга на совокупности планарных решеток с координационным числом 4, суммирование по которым представляет собой новую динамическую степень свободы, сводится к точнорешаемой двухматричной модели при $N \rightarrow \infty$. При температуре $T_c = 1/\ln 2$ в модели возникает фазовый переход третьего рода, соответствующий спонтанному упорядочению спинов. Отмечается формальное соответствие модели с O -мерной фермionной струной.

Двумерная модель Изинга и различные ее обобщения оказались источником многих полезных идей в квантовой теории поля и физике фазовых переходов. Однако как правило исследования ограничивались выбором одной из правильных двумерных решеток.

В данной работе будет получено точное выражение для статсуммы $Z_n(\beta)$ модели Изинга на совокупности произвольных планарных решеток с топологией сферы и с n -вершинами в термодинамическом пределе $n \rightarrow \infty$:

$$Z_n(\beta) = \sum_{\{G^{(n)}\}} \sum_{\{\sigma\}} \exp [\beta G_{ij}^{(n)} \sigma_i \sigma_j], \quad (1)$$

где $\sigma_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, n$ – изинговы спины, $G_{ij}^{(n)}$ – матрица связности планарного графа (матрица ближайших соседей, число которых всегда равно 4):

$$G_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_i \text{ и } \sigma_j \text{ – соседние на графе спины} \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (2)$$

$\beta = 1/T$ – обратная изингова температура (здесь мы рассматриваем только ферромагнитный случай), $\sum_{\{\sigma\}}$ – суммирование по всем спиновым конфигурациям, $\sum_{\{G^{(n)}\}}$ – суммирование по всем планарным графикам с топологией сферы и с n вершинами. Одна из решеточно-спиновых конфигураций изображена на рисунке.

Покажем, что производящая функция для статсуммы (1) вида

$$Z(\beta, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-4gc}{(1 - c^2)^2} \right]^n Z_n(\beta), \quad (3)$$

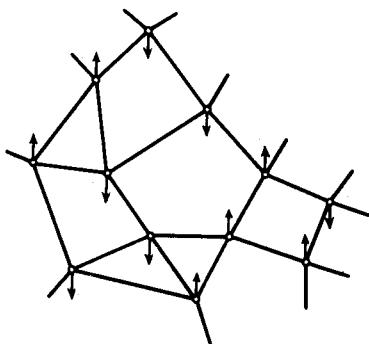
где

$$c = e^{-2\beta} \quad (4)$$

равна (с точностью до независящего от g вклада) свободной энергии модели двух эрмитовых матриц u_{ij} и v_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$:

$$F(c, g) = \ln \int du \int dv \exp \text{tr} [-u^2 - v^2 + 2cvu - gu^4 - gv^4] \quad (5)$$

в планарном пределе $N \rightarrow \infty$ ^{1, 2}.



Для доказательства достаточно заметить, что разложение $F(c, g)$ в ряд по константе связи g описывается диаграммной техникой теории типа φ^4 с двумя сортами вершин u -вершинами и v -вершинами, и, соответственно, с двумя типами пропагаторов:

$$\langle \frac{\text{tr}}{N} u^2 \rangle = \langle \frac{\text{tr}}{N} v^2 \rangle = \frac{1}{1 - c^2}, \quad (6)$$

$$\langle \frac{\text{tr}}{N} uv \rangle = \frac{c}{1 - c^2}. \quad (7)$$

Заданной диаграмме мы будем сопоставлять эквивалентную решетку, в вершинах которой располагаются изинговы спины (см. рисунок). u - и v -вершины будут сопоставляться спинам, направленным, соответственно, вверх или вниз. Для энергии связи двух соседних спинов имеем соотношения:

$$\exp(\beta E_{\uparrow\uparrow}) = \exp(\beta E_{\downarrow\downarrow}) = \frac{1}{1 - c^2}, \quad (8)$$

$$\exp(\beta E_{\uparrow\downarrow}) = \frac{c}{1 - c^2}. \quad (9)$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ мы получаем, как известно, лишь планарные диаграммы с топологией сферы. Взятие логарифма в (5) необходимо для выделения одних лишь связных решеток. Таким образом, эквивалентность (3) и (5) проверяется непосредственно в каждом порядке по g .

Предлагаемая нами модель допускает преобразование дуальности, аналогичное преобразованию на правильной квадратной решетке. При этом мы получаем модель Изинга на совокупности дуальных планарных графов $\{G^*\}$, построенных из четырехугольников. Дуальная температура связана с исходной соотношением

$$\tilde{\beta} = -\frac{1}{2} \ln \text{th}\beta. \quad (10)$$

Однако условие $\tilde{\beta} = \beta$ уже не определяет критической точки, поскольку модель не является самодуальной.

Отметим, что можно установить формальное соответствие между локальным пределом нашей модели ($n \rightarrow \infty$, постоянная решетки $a \rightarrow 0$) и нульмерной моделью струны с внутренними фермионами. Это соответствие, которое, конечно, должно быть подкреплено какими-то динамическими аргументами, следует из двух утверждений: 1) модель Изинга на произ-

вольной планарной решетке эквивалентна модели свободных внутренних фермионов на этой решетке³; 2) планарная решетка формально описывает искривленное двумерное пространство и может служить в качестве регуляризации мировой поверхности струны⁴.

Тот факт, что мы рассматриваем не треугольную решетку, не играет большой роли, так как, по-видимому, все эти модели лежат в одном классе универсальности.

Теперь мы приведем точное выражение для статсуммы $Z_n(\beta)$ в пределе $n \rightarrow \infty$. Из результатов работы² нетрудно извлечь следующее параметрическое представление для $F(c, g)$:

$$F(c, z) = \frac{1}{2} \ln \frac{z}{g(z)} + \frac{z^2}{2g^2(z)} \left[\frac{1}{2} \frac{z-1}{(3z-1)^3} + c^2 \frac{z+1}{3z-1} + \frac{c^4}{2} (3z^4 - 3z^2 + 1) \right] - \\ - \frac{z}{g(z)} \left[\frac{1}{3z-1} + c^2(1-z^2) \right] + \frac{1}{2} \ln(1-c^2) + \frac{3}{4}, \quad (11)$$

$$g(z) = \frac{z}{(3z-1)^2} - c^2 z + 3c^2 z^3 \quad (12)$$

Формула (11) получена путем непосредственного вычисления интегралов, фигурирующих в окончательном результате работы² для $F(c, g)$. При этом удобно ввести новую переменную $z = 2gf/c$, где $f(x)$ — функция, фигурирующая в².

Особенности функции $F(c, g)$, определяющие асимптотику коэффициентов разложения в³, можно найти из уравнения

$$g'_z(z) = 0. \quad (13)$$

Корни этого уравнения даются соотношениями

$$z_0 = -\frac{1}{3}, \quad (14)$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{3} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{c}} \right), \quad (15)$$

$$z_{3,4} = \frac{1}{3} \left(1 \mp \frac{i}{\sqrt{c}} \right). \quad (16)$$

В физическом интервале температур $0 \leq c \leq 1$ лишь корни z_0 и z_1 могут определять асимптотику разложения $F(c, g)$. Соответствующие им критические константы связи

$$g_0 = -\frac{1}{12} + \frac{2}{9} c^2, \quad (17)$$

$$g_1 = -\frac{2}{9} \sqrt{c} (\sqrt{c}-1)^2 (\sqrt{c}+2) \quad (18)$$

становятся равными друг другу при $c = 1/4$. Легко увидеть, что меняя параметр z от 0 до ∞ , при $0 \leq c < 1/4$ мы сначала наталкиваемся на особенность g_0 , в то время как g_1 остается на втором, нефизическом листе функции $F(c, g)$. Асимптотика коэффициента разложения в (5) в данном интервале определяется соотношением

$$Z_n(c) \simeq n^{-b} \left[-\frac{4cg_0(c)}{(1-c^2)^2} \right]^{-n}, \quad 0 \leq c \leq 1/4. \quad (19)$$

При $1/4 < c \leq 1$ особенности g_0 и g_1 меняются ролями, и мы получаем другую асимптотику

$$Z_n(c) \simeq n^{-b} \left[-\frac{4cg_1(c)}{(1-c^2)^2} \right]^{-n}, \quad 1/4 \leq c \leq 1. \quad (20)$$

Итак, в пределе $n \rightarrow \infty$ мы получаем окончательный результат для статсуммы модели Изинга на случайной решетке:

$$[Z_n(c)]^{-1/n} \simeq \begin{cases} -\frac{4cg_0(c)}{(1-c^2)^2}, & \text{при } 0 \leq c \leq 1/4, \\ -\frac{4cg_1(c)}{(1-c^2)^2}, & \text{при } 1/4 \leq c \leq 1 \end{cases} \quad (21)$$

Критическая температура соответствует $c = 1/4$:

$$\beta^* = \ln 2. \quad (22)$$

Далее, вычисляя производные $\frac{\partial^k Z(c)}{\partial c^k}$ с учетом (17), (18) и (21), мы обнаруживаем, что $\partial Z/\partial c$ и $\partial^2 Z/\partial c^2$ в точке перехода непрерывны, в то время как $\partial^3 Z/\partial c^3$ терпит конечный скачок, что соответствует фазовому переходу третьего рода. При увеличении температуры в точке перехода в системе возникает спонтанное упорядочение спинов. Это видно из сравнения низкотемпературной и высокотемпературной асимптотик:

$$Z_n(c)|_{c \rightarrow 0} \sim (12/4 \cdot c)^n, \quad (23)$$

$$Z_n(c)|_{c \rightarrow 1} \sim (24/4)^n. \quad (24)$$

Низкотемпературный предел (23) не отличается от асимптотики коэффициентов разложения для однодоминантной модели типа φ^4 ⁵, что соответствует "замерзшим" изинговыми спинам. Отличие основания степенной асимптотики в 2 c раз в высокотемпературном случае (24) соответствует суммированию по полностью разупорядоченным спинам.

Нетрудно также убедиться, что из (11) следует

$$F'_z(z_0) = F''_{zz}(z_0) = F'_z(z_1) = F''_{zz}(z_1), \quad (25)$$

что с учетом (13) приводит к значению индекса b в (19) и (20) при $c \neq c^*$

$$b = 7/2, \quad c \neq 1/4 \quad (26)$$

не отличающимся от индекса b в однодоминантной модели⁵.

При $c = c^*$ мы имеем дополнительно к (25) и (13) соотношение $g''_{zz}(z) = 0$, что приводит к изменению индекса b :

$$b^* = 10/3, \quad c = 1/4. \quad (27)$$

Мы видим, что в критической точке фермионы становятся дальнодействующими и влияют на флуктуации "геометрии" решетки.

В заключение отметим, что замеченное нами соответствие позволяет исследовать также модель Изинга на случайном графе в произвольном магнитном поле и модель этого же типа с симметрией Z_3 . Этим вопросам, а также обобщению на случай треугольной решетки, будет посвящена расширенная работа.

Литература

1. Itzykson C, Zuber J.-B. J. Math. Phys., 1980, 21, 411.
2. Mehta M.L. Comm. Math. Phys., 1981, 79, 327.
3. Бершадский М.А., Вайсбурд И.Д., Мигдал А.А. Письма в ЖЭТФ, 1986, 43, 153; Migdal A.A. Phys. Rept., 1983, 102 (4), 199.
4. Kazakov V.A. Phys. Lett., 1985, 150B, 282; David F. Nucl. Phys., 1985, B257, 45; Ambjorn J., Durhuus B., Fröhlich J. Nucl. Phys., 1985, B257, 433; Kazakov V.A., Kostov I.K., Migdal A.A. Phys. Lett., 1985, 157B, 295.
5. Brezin E., Itzykson C., Parisi G., Zuber J.-B. Comm. Math. Phys., 1978, 59, 35.