Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 3, стр. 109 – 111 *10 августа 1986 г.*

СТОХАСТИЧНОСТЬ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЯНГА – МИЛЛСА, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ

С.Г.Матинян, Е.Б.Прохоренко, Г.К.Саввиди

Показано, что сферически симметричные уравнения Янга – Миллса, зависящие от времени, представляют неинтегрируемую систему. В частности, фазовое пространство вблизи статического решения Ву – Янга является областью стохастичности.

Известно, что классические уравнения Янга – Миллса (Я.М.), зависящие только от времени ("классическая механика Я.М."), – неинтегрируемая система [1 - 3].

Созрела необходимость исследовать общую 3 + 1-мерную полевую систему Я.М. с этой точки зрения.

Здесь приведены результаты такого исследования для сферической симметрии, когда неабелевый вектор-потенциал A_μ^a зависит от $r = |\mathbf{r}|$ и t. Одновременно можно получить также ответ на вопрос о стабильности известных сферически симметричных статических решений типа – Ву – Янга [4].

Рассматриваемая задача сводится к изучению уравнения нелинейной струны типа

$$u_{tt} - u_{xx} = F(x, u, u_x, u_t, \dots) \tag{1}$$

(u_t, u_{tt} и т. д. – производные по соответствующему аргументу). Аналитическое исследование вопроса интегрируемости такой системы в общем случае невозможно.

Наиболее подходящим методом здесь является подход, предложенный в известной работе Ферми – Паста – Улама [5], состоящий в замене непрерывной струны (1) ее дискретным аналогом – цепочкой связанных ангармонических осцилляторов – и в наблюдении за распределением энергии ее колебаний по гармоникам. В общем случае, когда система неинтегрируема, при малых начальных возмущениях происходит перекачка энергии между несколькими гармониками, система аномально медленно "термализуется", что и наблюдалось авторами работы [5]. При больших же возмущениях движение происходит в эргодическом слое, что приводит к равно-распределению энергии по гармоникам и наблюдалось в системе Ферми – Паста – Улама [6]. Именно такой подход выбран нами для исследования системы сферически симметричных уравнений Я.М., общий вид A_μ^a которых для группы $SU(2)$ в 3 + 1-пространстве дается выражением [7]:

$$A_j^a = \frac{\varphi_1}{r^3}(\delta_{ja}r^2 - x_j x_a) + \frac{1+\varphi_2}{r^2}\epsilon_{jak}x_k + A_1\frac{x_j x_a}{r^2}, \tag{2}$$

$$A_0^a = A_0 x_a / r,$$

где произвольные функции $\varphi_{1,2}$ и $A_{0,1}$ зависят от r и t. Калибровочная инвариантность позволяет положить $A_0 = 0$. В дальнейшем мы подробно изучим специальный случай, когда $\varphi_1 = A_1 = 0$, так что будем иметь дело с нелинейной струной вида (1) ($\varphi \equiv \varphi_2$):

$$(\partial_t^2 - \partial_r^2)\varphi = -\frac{1}{r^2}\varphi(\varphi^2 - 1). \tag{3}$$

Статическое решение (3) $\dot\varphi = 0$ есть монополь Ву – Янга $A_j^a = \frac{1}{r^2}\epsilon_{jak}x_k$, $\varphi = -1$ – вакуумное решение $A_j^a = 0$, $\varphi = 1$ дает поле, калибровочно эквивалентное вакуумному.

Качественный анализ уравнения (3) показывает, что сферически симметричные решения уравнений Я.М. уже в статическом пределе ($\pi_\varphi = \partial\varphi/\partial t = 0$) неустойчивы: малые изменения начальных условий ($\varphi(r)$ и $\partial\varphi/\partial r$) резко меняют поведение решений, приводя к возникновению или изменению положения сингулярностей. Выделяются пять статических решений (3), остающихся конечными для всех $r \geqslant 0$. Это уже известно $\varphi = \pm 1$ и $\varphi = 0$ и две сепаратрисы уравнения (3) $\varphi_{C_{1,2}}(r)$, которые при $r \to 0$ переходят в решение Ву – Янга, а при $r \to \infty$ выходят на вакуумные $(\varphi(r) = \pm 1)$. $\varphi_{C_{1,2}}(r)$, насколько мы знаем, до сих пор не были известны.

Анализ фазовых траекторий системы (3) вблизи статических решений показал наличие экспоненциальной временной неустойчивости для решений $\varphi(r) = 0$ и новых решений $\varphi_{C_{1,2}}(r)$ и устойчивость относительно малых возмущений вакуумных решений $\varphi(r) = \pm 1$. Все сингулярные (при $\pi_\varphi = 0$) решения (3) оказываются также экспоненциально неустойчивыми.

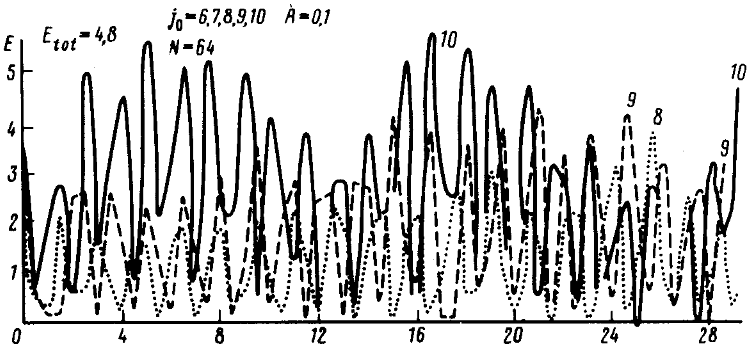

Рис. 1

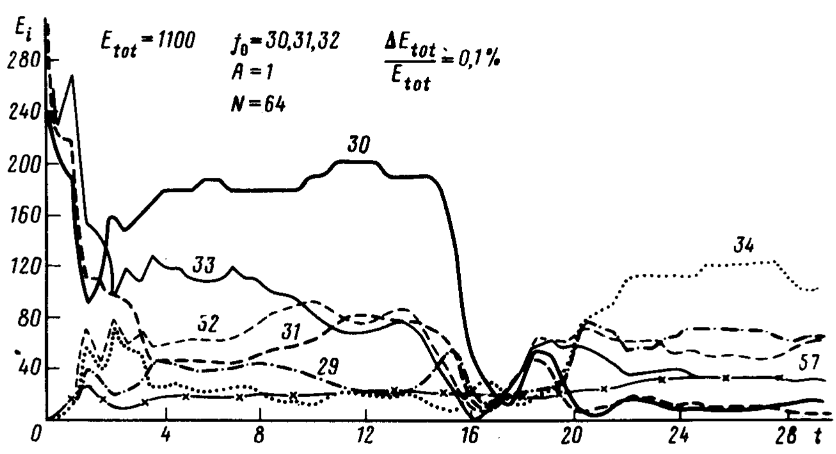

Рис. 2

Конечные возмущения уравнения (3) исследовались нами в численных экспериментах типа [5]. Непрерывная струна (3) аппроксимировалась набором нелинейных связанных осцилляторов $\varphi(i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, число которых N бралось равным 64 и 128.

Численно интегрировался дискретный аналог уравнения (3):

$$\ddot{\varphi}(i, t) = \frac{\varphi(i+1, t) - 2\varphi(i, t) + \varphi(i-1, t)}{(\Delta r)^2} - \frac{\varphi(i, t)[\varphi^2(i, t) - 1]}{(i\,\Delta r)^2} \qquad (4)$$

(Δr – шаг дискретизации, взятый нами равным 0,1). Возмущения вблизи статических решений $\varphi = 0$, $\varphi = \pm 1$, $\varphi_{C_{1,2}}(r)$ изучались введением соответствующих начальных и граничных условий, выраженных через разложение по гармоникам:

$$\varphi(i, t) = \sqrt{2/N} \sum_{j=1}^{N-1} \psi(j, t) \sin(\pi i j/N).$$

На рис. 1 приведены примеры зависимости от времени энергии трех мод $j = 8, 9, 10$ при малом начальном возбуждении пяти мод (амплитуда $A = 0{,}1$) $j_0 = 6 - 10$. Здесь $N = 64$. Полная энергия "струны" (4) $E_{tot} = 4{,}8$ $(\Delta E_{tot}/E_{tot} < 1\%)$. Аналогично ведут себя моды $j_0 = 6, 7$, а все остальные моды практически не возбуждены. Видно, что система совершает приближенно квазипериодическое движение.

С увеличением энергии струны картина существенно меняется. На рис. 2 $(N = 64, E_{tot} = 1100, \Delta E_{tot}/E_{tot} = 0{,}1\%, j_0 = 30, 31, 32)$ ясно видно, как происходит выравнивание энергий первоначально возбужденных (амплитуда $A = 1$) ($j_0 = 30 - 32$) и остальных мод на рис. 2 приведены энергии некоторых мод, $j = 29, 33, 34, 57$). Дальнейшее (трехкратное) увеличение энергии на этих модах оставляет картину качественно той же.

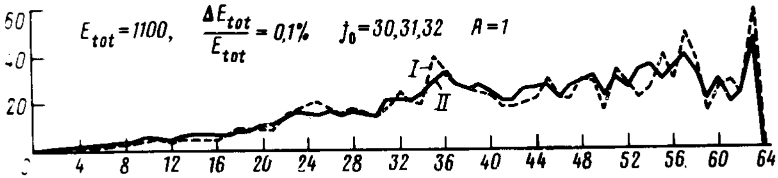

Рис. 3

Имеет место термализация (стохастизация) системы. С увеличением N (N бралось равным 128) (т. е. при приближении, как показывает исследование уравнения (4), к непрерывному пределу) струна "термализуется" при меньших возмущениях.

О стохастичности системы говорит и рис. 3, где приведено распределение усредненной по большому времени (интервал усреднения 780 с шагом 0,04) энергии $\overline{E_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, 64$) по модам. Видно, что в среднем все моды возбудились.

Итак, не только классическая механика Я.М. [1, 2], а и классическая полевая теория Я.М., описывающая систему с бесконечным числом степеней свободы, неинтегрируема, т. е. обнаруживает динамический хаос.

Литература

1. *Матинян С.Г., Саввиди Г.К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н.Г.*, ЖЭТФ, 1981, **80**, 830.
2. *Матинян С.Г., Саввиди Г.К., Тер-Арутюнян-Саввиди Н.Г.* Письма в ЖЭТФ, 1981, **34**, 613.
3. *Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л.* Письма в ЖЭТФ, 1981, **34**, 171.
4. *Wu T.T., Yang C.N.* In: Properties of Matter Under Unusual Conditions (ed. H.Mark, S.Fernbach, Interscience, N.Y.: 1969, p. 349.
5. *Fermi E., Pasta J.R., Ulam S.* Los Alamos Scientific Lab. Rep. No. LA-1940, May 1955. см. русск. перевод: Ферми Э. Научные труды, ч. II М. : Наука, 1972.
6. *Израилев Ф.П., Хасамутдинов А.И., Чириков Б.В.* Препринт ИЯФ СО АН СССР, 1968, № 2.
7. *Witten E.* Phys. Rev. Lett., 1977, **38**, 121.

Поступила в редакцию
29 апреля 1986 г.