Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 3, стр. 144 – 148 *10 августа 1986 г.*

ДЕЙСТВИЕ ВЕССА – ЗУМИНО ДЛЯ ОРБИТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ ^{3}He-A

Г.Е.Воловик

Особенность в динамике орбитального момента в ^{3}He-A объясняется аномалией, приводящей к передаче момента импульса из вакуума в возбуждения. Этот процесс эквивалентен рождению электронно-позитронных пар в электрическом поле. Получен функционал Весса – Зумино, приводящий к источнику момента импульса. Наличие вихревой особенности на ферми-поверхности в ^{3}He-A приводит к тесной связи между орбитальной динамикой и динамикой вихрей.

Обращение энергетической щели в нуль в двух точках на ферми-поверхности в сверхтекучем ^{3}He-A при $\mathbf{k} = \pm k_F \mathbf{l}$ приводит к ряду проблем в динамике ^{3}He-A при низких температурах. Некоторые из них решены: 1) существование аномального орбитального тока $-\frac{1}{2}C_0 \mathbf{l} \times (\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l})$ с $C_0 = k_F^3/3\pi^2$, что приближенно совпадает с плотностью ρ, является следствием киральной аномалии, приводящей к асимметричной ветви фермионного спектра, пересекающей ферми-поверхность [1, 2]. 2) Та же ветвь приводит к существованию отличной от нуля плотности состояний при наличии текстуры в поле вектора $\mathbf{l}$ и, следовательно, к ненулевой плотности нормальной компоненты при $T = 0$ [1 - 3]. 3) Несохранение вакуумного тока $\mathbf{j}$ при $T = 0$ также является следствием киральной аномалии – несохранения кирального тока (см. [4]):

$$\partial_\mu J_5^\mu = \frac{e^2}{8\pi^2} F^*_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad F^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} e_{\mu\nu\alpha\beta} \quad . \tag{1}$$

где $F_{\mu\nu}$ – напряженность "электромагнитного" поля $\mathbf{A} = k_F \mathbf{l}$. В ^{3}He-$A$ рождение киральных фермионных возбуждений сопровождается рождением импульса из вакуума, т. е. имеется источник вакуумного импульса [5, 3, 1]:

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \vec{\nabla}\overleftrightarrow{\pi} = k_F \mathbf{l} \frac{1}{8\pi^2} F^*_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \cong -\frac{3}{2} C_0 \mathbf{l} \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{l} \cdot \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right). \tag{2}$$

4) Неаналитическое логарифмическое поведение градиентной энергии при $T = 0$ [6] связано с явлением нуль-заряда [5], известным в квантовой электродинамике [7].

Здесь мы рассмотрим особенность в динамике орбитального момента. Лагранжев формализм, примененный к динамике вектора $\mathbf{l}$ [8], противоречит микроскопическому анализу (см. подробнее в [3]), который приводит к дополнительной правой части в законе сохранения внутреннего момента импульса куперовских пар $\mathbf{L} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{l}$:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \vec{\theta}} = \frac{1}{2} C_0 \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \quad , \tag{3}$$

где $\vec{\theta}$ – орбитальный угол поворота параметра порядка, причем проекция $\vec{\theta}$ на $\mathbf{l}$ соответствует фазе бозе-конденсата. Уравнение (3) содержит как закон сохранения массы, так и уравнение для вектора $\mathbf{l}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\mathbf{j} = 0, \qquad \mathbf{j} = -2 \frac{\partial F}{\partial \vec{\nabla}(\vec{\theta}\cdot\mathbf{l})} \; ; \tag{4а}$$

$$\frac{1}{2}(\rho - C_0)\left[\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t}\right] = \frac{\delta F}{\delta \mathbf{l}} \quad , \qquad \delta \mathbf{l} = [\vec{\theta}, \mathbf{l}] \, . \tag{4б}$$

Правую часть уравнения (3) можно трактовать, как аномальный источник момента импульса за счет перехода вакуумного момента $\mathbf{L}$ в момент возбуждений $\mathbf{L}_{exc}$ под действием "электрического" поля $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} = -k_F \dot{\mathbf{l}}$. Действительно, это соответствует рождению электронно-позитронных пар в электрическом поле , поскольку роль $\mathbf{L}_{exc}$ в квантовой электродинамике играет ток заряженных частиц $\mathbf{J}$. Различие заключается лишь в том, что в ^{3}He-A фермионы из-за нулевой массы должны рождаться при любом поле, в то время как в реальной квантовой электродинамике рождение пар имеет пороговый характер (см. [9] и [10]). Если пренебречь диссипацией за счет столкновений частиц, ток частиц должен расти: $\dot{\mathbf{J}} \sim \mathbf{E}$, что в ^{3}He-$A$ соответствует росту момента возбуждений $\dot{\mathbf{L}}_{exc} = -\frac{1}{2} C_0 \dot{\mathbf{l}}$. Коэффициент пропорциональности между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ в ^{3}He-A определяется условием сохранения полного внутреннего момента импульса: $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{L} + \mathbf{L}_{exc}) + \frac{\delta F}{\delta \vec{\theta}} = 0$, в то время как в квантовой электродинамике с безмассовыми фермионами он пока неизвестен.

Покажем, что правая часть (3), как и правая часть (2), является следствием киральной аномалии, характерной для безмассовых фермионов. Для этого рассмотрим ту часть действия, которая приводит к швингеровскому источнику кирального тока в (1). Эта часть необычна тем, что для ее записи требуется введение дополнительной 5-й координаты, как это имеет место для функционалов типа Весса – Зумино [11]:

$$S_{WZ} = \kappa \frac{\hbar}{16\pi^2} \int dt d^3x dx^5 \, e^{\alpha\beta\gamma\mu\nu} A_\alpha F_{\beta\gamma} F_{\mu\nu} \,, \qquad (5)$$

причем интегрирование ведется по такому 5-мерному многообразию, границей которого является физическое 4-мерное пространство. Согласно теореме Нетер для получения закона сохранения кирального тока J_5 нужно совершить калибровочное преобразование $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$ и проварьировать действие по параметру χ преобразования, при этом варьирование S_{WZ} приводит к правой части уравнения (1).

Выразим (5) через поле $\mathbf{l}$, учитывая, что $A_0 = A_5 = 0$, $\mathbf{A} = k_F \mathbf{l}$:

$$S_{WZ} = \frac{3}{2} \kappa \hbar \int d^3x \int dt dx^5 \, \mathbf{l} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^5}\right] C_0 \qquad (6)$$

и выясним, каким условиям должно удовлетворять S_{WZ} и чему равен безразмерный параметр κ. Во-первых, вариация S_{WZ} по $\mathbf{l}$ не должна зависеть от способа расширения физического пространства. Это выполняется, если C_0 не зависит от t (динамическая инвариантность параметра C_0 доказывалась в [12]). При этом если выбрать $\kappa = 1/3$, то S_{WZ} окажется той добавкой к действию Лебедева – Халатникова [8], которая приводит к правой части уравнения (3), поскольку в этом случае

$$\frac{\delta S_{WZ}}{\delta \vec{\theta}} = \left[\mathbf{l}, \frac{\delta S_{WZ}}{\delta \mathbf{l}}\right] \doteq \frac{1}{2} C_0 \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \,. \qquad (7)$$

Во-вторых, изменение S_{WZ} при другом выборе 5-мерного пространства должно быть кратно $2\pi\hbar$. Поскольку различие между двумя значениями действия $S_{WZ}^{(1)} - S_{WZ}^{(2)}$ при разных выборах 5-мерного пространства с той же границей является интегралом по замкнутому пространству, а интеграл от $\mathbf{l} \cdot [(\partial \mathbf{l}/\partial t), (\partial \mathbf{l}/\partial x^5)]$ по замкнутой поверхности является топологическим инвариантом и кратен 4π, получаем, что второе требование выполняется, если $3\kappa N_0$ является целым, где $N_0 = \int d^3x C_0$. При $\kappa = 1/3$ величина N_0 должна быть целой. Правильность такого выбора κ подтверждается тем, что при этом правильно квантуется внутренний момент импульса, т. е. он кратен $\hbar/2$:

$$\int d^3x \, (L + L_{exc}) = \frac{\hbar}{2} \int d^3x \, (\rho - C_0) = \frac{\hbar}{2} (N - N_0) \,, \qquad (8)$$

где N – число частиц.

Отметим, что S_{WZ} в (5) и (6) отличается как от действия Весса – Зумино для ^{3}He, введенного Балачандраном [13], так и от S_{WZ}, полученного в [14], которое зависит от импульса $\mathbf{k}$ и, обращается в нуль при суммировании по импульсам. Действие S_{WZ} в (5) и (6) можно записать и на квазиклассическом уровне, где динамическими переменными являются функция распределения частиц $n(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ и зависящая от импульса фаза $\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ параметра порядка, имеющая вихревую особенность в k-пространстве, буджум, при $\pm k_F \mathbf{l}$ [15]. Из-за буджумов орбитальная динамика имеет много общего с динамикой вихрей. Если буджумы на ферми-поверхности отсутствуют, как в ^{3}He-B, то действие в терминах n и Φ имеет вид $S = S_k^{(0)} + S_p$, где кинетическая энергия имеет вид $S_k^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_k \int d^3x dt n \dot{\Phi}$, а S_p – потенциальная энергия, зависящая от градиентов Φ. Чтобы распространить динамические уравнения для n и Φ на случай жидкости с буджумами, введем следующий функционал действия в расширенном пространстве:

$$S_k = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \int d^3x dt dx^5 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial n}{\partial x^5} - \frac{\partial n}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial x^5} \right) = S_k^{(0)} + S_{WZ} \,, \qquad (9a)$$

$$S_{WZ} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\int d^3x\,dt\,dx^5\, n\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial x^5} - \frac{\partial}{\partial x^5}\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi\ . \tag{9б}$$

В ^{3}He-A разность смешанных производных фазы Φ отлична от нуля в точках буджумов[15], где она равна $2\pi(\mathbf{k}\cdot\mathbf{l})^2\,\delta(\mathbf{k}_\perp)\mathbf{l}[(\partial\mathbf{l}/\partial t),\ (\partial\mathbf{l}/\partial x^5)]$, в результате после суммирования по $\mathbf{k}$ выражение (9б) переходит в (6) с $\kappa = 1/3$.

Выражение (9) можно применить и для обычных вихрей в r-пространстве, взяв Φ в виде $\Phi(\mathbf{k}) + 2\varphi(\mathbf{r},t)$, где $\varphi(\mathbf{r},t)$ меняется на $2\pi m$ при обходе вокруг вихря. Тогда $S_{WZ} = 2\pi\hbar m\rho(0)\int dt dx^5 d\sigma(\partial\mathbf{a}/\partial t)\cdot[(\partial\mathbf{a}/\partial x^5),\ (\partial\mathbf{a}/\partial\sigma)]$, где $\mathbf{a}(\sigma)$ – смещение линии вихря, зависящее от координаты σ вдоль линии, а $\rho(0)$ – плотность на линии вихря. Вариация S_{WZ} по $\mathbf{a}$ приводит к дополнительной силе Магнуса, действующей на вихрь:

$$\frac{\delta S_{WZ}}{\delta\mathbf{a}(\sigma)} = m\hbar\rho(0)\left[\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\sigma},\ \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}\right], \tag{10}$$

которую нужно вычесть из обычной силы Магнуса, содержащей плотность вдали от вихря $\rho(\infty)$. Таким образом эффективная сила Магнуса содержит $\rho(\infty) - \rho(0)$. Аналогичную силу Магнуса[16] для линейных объектов в ферромагнетике (цилиндрические домены и магнитные вихри) также можно получить из действия Весса – Зумино, равного для ферромагнетиков $S^F_{WZ} = \int d^3x dt dx^5\ M\mathbf{m}\cdot[(\partial\mathbf{m}/\partial t),(\partial\mathbf{m}/\partial x^5)]$, где $\mathbf{m}$ – направление магнитного момента $\mathbf{M} = M\mathbf{m}$. Переходя к координате $\mathbf{a}$ линейного объекта по формуле $\mathbf{m}=\mathbf{m}(\mathbf{r}-\mathbf{a}(t,\sigma,x^5))$ и варьируя по $\mathbf{a}$, получим силу Магнуса $Ms[(\partial\mathbf{a}/\partial\sigma),\ (\partial\mathbf{a}/\partial t)]$, где s – площадь, заметаемая на единичной сфере вектором $\mathbf{m}$ в коре линейного объекта. Для цилиндрического домена $s = 4\pi$, а для аксиально симметричного магнитного вихря $s = 2\pi(m_z(\infty) - m_z(0))$. Не исключено, что и в вихрях сверхтекучего ^{3}Не сила Магнуса зависит от топологии кора, это объяснило бы скачок в критической скорости, наблюдаемый при вихревом переходе[17].

В ^{3}He-A сила Магнуса, действующая на вихри в k-пространстве, т. е. на буджумы, находящиеся в точках $\pm k_F\mathbf{l}$, представлена левой частью уравнения (4б). Параметр C_0 таким образом представляет собой плотность в коре вихревой особенности, где сверхтекучая щель отсутствует, что и соответствует величине $k_F^3/3\pi^2$. А квантование внутреннего момента (8) соответствует квантованию движения вихря: вихревое кольцо при своем движении между рождением и исчезновением заметает замкнутую поверхность, внутри которой находится целое число частиц[18].

Я благодарен В.Н.Грибову и С.П.Новикову за ценные обсуждения.

Литература

1. *Combescot R., Dombre T.* Phys. Rev., 1986, **B33**, 79.
2. *Балацкий А.В., Воловик Г.Е., Конышев В.А.* ЖЭТФ, 1986, **90**, 2038; *Балацкий А.В., Конышев В.А.* ЖЭТФ, в печати.
3. *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* ЖЭТФ, 1981, **81**, 989.
4. *Schwinger J.* Phys. Rev., 1951, **82**, 664.
5. *Воловик Г.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 428.
6. *Cross M.C.* J. Low Temp. Phys., 1975, **21**, 525.
7. *Ландау Л.Д., Абрикосов А.А., Халатников И.М.* ДАН СССР, 1954, **95**, 1177.
8. *Лебедев В.В., Халатников И.М.* ЖЭТФ, 1977, **73**, 1537.
9. *Мигдал А.Б.* "Фермионы и бозоны в сильных полях", М.: Наука, 1978.
10. *Грибов В.Н.* "Новая гипотеза о природе невылетания кварков и глюонов", препринт, 1986.
11. *Wess J., Zumino B.* Phys. Lett., 1971, **B37**, 95; *Witten E.* Nucl. Phys., 1983, **B223**, 422; *Balachandran A.P., Nair V.P., Trahern C.J.* Phys. Rev., 1983, **D27**, 1369.
12. *Volovik G.E., Balatskii A.V.* J. Low Temp. Phys., 1985, **58**, 1.

13. *Balachandran A.P.* "Solitons in ^{3}He-*B*", preprint, Syracuse University, SU-4228-326.

14. *Garg A., Nair V.P., Stone M.* "Nonabelian bosonization and topological aspects of BCS system", preprint, NS-ITP-86-46.

15. *Воловик Г.Е., Минеев В.П.* ЖЭТФ, 1982, **83**, 1025; 1976, **71**, 1129.

16. *Никифоров А.В., Сонин Э.Б.* ЖЭТФ, 1983, **85**, 642.

17. *Pekola J.P. et al.* Phys. Rev. Lett., 1984, **53**, 584.

18. *Haldane F.D.M., Wu Yong-Shi.* Phys. Rev. Lett., 1985, **55**, 2887.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
25 июня 1986 г.