Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 4, стр. 157 – 160 *25 августа 1986 г.*

О ЗАНУЛЕНИИ ВАКУУМНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ СУПЕРСТРУН

А.Ю.Морозов, А.М.Переломов

Предлагается гипотеза о структуре формул для вакуумных диаграмм в первично квантованной теории суперструн. Аналитическая мера в интеграле по пространству модулей пропорциональна сумме. $\sum\limits_{e} \epsilon_e \theta\,[e]^4\ (\epsilon_e = \pm 1)$ по спиновым структурам на римановых поверхностях и обращается в нуль в силу тождеств Римана для θ-констант.

1. В последнее время на основании теоремы Белавина – Книжника о сокращении аналитической аномалии достигнуто определенное понимание структуры многопетлевых амплитуд теории замкнутых ориентируемых бозонных струн в терминах аналитической геометрии пространства модулей (подробности см. в работах [1]). В суперсимметричном случае формулы для амплитуд пока неизвестны. Что касается статсумм (p-петлевых вакуумных диаграмм), то они могут быть представлены в виде интегралов по пространствам M_p модулей римановых поверхностей рода p с аналитическими мерами $d\mu^{(p)}_{SS}(y)$ и $d\mu^{(p)}_{HS}(y)$ y – голоморфные координаты на M_p):

$$\begin{aligned} &\int\limits_{M_p} (\det \operatorname{Im} \tau)^{-5}\, |\, d\mu^{(p)}_{SS}(y)\,|^2 \text{ — для суперструны,} \\ &\int\limits_{M_p} (\det \operatorname{Im} \tau)^{-5}\, d\mu^{(p)}_{SS}\, \overline{d\mu^{(p)}_{HS}} \text{ — для гетеротической струны.} \end{aligned} \tag{1}$$

Если эти теории действительно обладают 10-мерной суперсимметрией на квантовом уровне, то вакуумные петли в них обязаны зануляться, точнее $d\mu^{(p)}_{SS}(y) \equiv 0$. Ниже предлагается гипотеза о структуре $d\mu^{(p)}_{SS}(y)$, обеспечивающая выполнение этого тождества.

2. Статистическая сумма для суперструны может быть представлена в виде интеграла по пространству супермодулей с определенной мерой. Пространство супермодулей может быть представлено, например, как фактор по модулярной группе $\mathrm{Sp}(p, Z)$ прямого произведения $2^{p-1}\ (2^p + 1)$ экземпляров пространства Тейхмюллера $\widetilde{M}_p$ на $2p - 2$-мерное плоское пространство "нечетных модулей"[1)]. Пространство Тейхмюллера $\widetilde{M}_p$ – это пространство модулей римановых поверхностей с отмеченной системой базисных разрезов. M_p есть фактор $\widetilde{M}_p$ по модулярной группе. $2^{p-1}\,(2^p + 1)$ экземпляров $\widetilde{M}_p$ отличаются выбором четных спинорных структур.

[1)] Мы признательны А.С.Шварцу за обсуждение этой формулировки. По поводу пространства Тейхмюллера и его связи с пространством модулей см. [1] и ссылки в этих работах.

© Издательство "Наука", Письма в ЖЭТФ, 1986 г.

Мера на пространстве супермодулей определяется отношением супердетерминантов операторов $\bar{\partial}$, действующих на суперполя $\hat{x}(\xi)$ и $\hat{e}(\xi)$ (десятимерные координаты струны + фермионы и супертетрада). Выражения типа (1) получаются после интегрирования по нечетным модулям. Хотя само пространство супермодулей связно, после такого интегрирования возникает дискретная сумма по $2^{p-1}(2^p+1)$ экземплярам обычного пространства модулей M_p:

$$d\mu^{(p)}_{SS}(y) \sim \sum_e C_e(y)(\det_e \bar{\partial}_{1/2})^5(y)\,[(\det'_e \bar{\partial}_{3/2})(y)]^{-1}. \qquad (2)$$

Мы выделили здесь только вклады, зависящие от θ-характеристик – граничных условий на полуцелые дифференциалы. Веса $C_e(y)$ в этой сумме, возникающие после интегрирования по нечетным модулям, являются некоторыми функциями на M_p. Они могут быть определены по зависимости супердетерминантов от нечетных модулей, или, по другому, из модулярных свойств $d\mu^{(p)}_{SS}(y)$. Мы воспользуемся для их определения в п. 4 несколько иным рассуждением. При вычислении амплитуд веса $C_e(y)$ будут зависеть от рассматриваемой амплитуды.

3. Зависимость $\det_e \bar{\partial}_{n+\frac{1}{2}}$ от θ-характеристики e в основном определяется соответствующей θ-константой $\theta[e]$: $\det_e \bar{\partial}_{n+\frac{1}{2}}(y) \sim \theta[e](y)$ ($\theta[e]$ зависит от матрицы периодов τ, являющейся аналитической функцией y: см. [1, 2] по поводу этой пропорциональности и [1–3] – по поводу определения и свойств θ-констант). Однако, зависимость исчерпывается этим только для $n = 0$:

$$\det_e \bar{\partial}_{1/2} \sim \theta[e] \text{ (точнее } [\det\bar{\partial}_0]^{1/2}(\det_e \bar{\partial}_{1/2}(y)) = \theta[e](y)\ ^4). \qquad (3)$$

Тогда и только тогда, когда на римановой поверхности имеются голоморфные 1/2-дифференциалы с данными граничными условиями, $\theta[e](y)$ обращается в нуль, и число дифференциалов равно порядку нуля $\theta[e](y)$. По-крайней мере для четных характеристик (только ими мы сейчас интересуемся)

$$\det'_e \bar{\partial}_{3/2}(y) \sim \Phi_e^{-1}\theta[e](y), \qquad \text{(точнее } [\det\bar{\partial}_0]^{1/2}\det'_e \bar{\partial}_{3/2}(y) = \Phi_e^{-1}\theta[e](y)\ ^4), \qquad (4)$$

причем $\det'_e \neq 0$ ни при каких y, так что функция $\Phi_e(y)$ должна полностью сокращать все нули $\theta[e](y)$ и не обращаться в нуль, когда $\theta[e] \neq 0$. С другой стороны, она должна зависеть от граничных условий однозначно, в отличие от $\theta[e]$, которая приобретает фазовые множители при модулярных преобразованиях, не меняющих e. В качестве $\Phi_e(y)$ может быть выбрано выражение $\Phi_e = \det[\zeta_\alpha(P_1)\ldots\zeta_\alpha(P_{p-1})\zeta'_\alpha(P_1)\ldots\zeta'_\alpha(P_{p-1})]$. Здесь $\zeta_1\ldots,\zeta_{2p-2}$ – голоморфные 3/2-дифференциалы на римановой поверхности с граничныи условиями, отвечающими данной характеристике e, а $P_1\ldots P_{p-1}$ – положения двойных нулей голоморфного 1-дифференциала Прима $\nu^2 = \theta_{,i}\omega_i$ (ω_i – канонические голоморфные дифференциалы, $\int_{a_i}\omega_j = \delta_{ij}$, $\int_{b_i}\omega_j = \tau_{ij}$). В локальных координатах ξ вблизи P_μ $\zeta = [\zeta(P_\mu) + \zeta'(P_\mu)\xi + O(\xi^2)](d\xi)^{3/2}$. Если для римановой поверхности (для данного y) $\theta[e] = 0$, это означает, что на ней имеются голоморфные 1/2-дифференциалы с данными граничиными условиями $\psi_1,\ldots,\psi_k$, число k которых равно порядку нуля $\theta[e]$ (см. (3)). Тогда в число голоморфных 3/2-дифференциалов $\zeta_1,\ldots,\zeta_{2p-2}$ входят $\nu^2\psi_1,\ldots,\nu^2\psi_k$, каждый из которых имеет двойные нули во всех точках P_μ, так что $\det[\zeta_\alpha(P_\mu)\zeta'_\alpha(P_\mu)]$ имеет нуль k-го порядка, и правая часть равенства (4) нигде не обращается в нуль. Наоборот, если детерминант имеет нуль порядка k, то какие-то k голоморфных 3/2-дифференциалов ζ_α имеют двойные нули во всех точках P_μ. По этим к ζ_α строятся k голоморфных 1/2-диффренциалов $\psi = 3\nu^{-2}$, чье существование в силу (3) равносильно тому, что $\theta[e]$ имеет k-кратный нуль.

Недавно Книжником [4] дано доказательство формул типа (3), (4), исходя из условий, налагаемых конформной инвариантностью и аномалиями. Эти равенства приведены в (3) и (4) в скобках, для аномалий существенны и вклады, не зависящие от характеристик. Например, аномалия, имеющаяся в произведении $\det^{1/2}\bar\partial_0 \det_e \bar\partial_{3/2}$, вычисленном в метрике $|\nu|^4 = \theta_{,i}\bar\theta_{,j}\omega_i\bar\omega_j$ на римановой поверхности, точно учитывается зависимостью правой части равенства (4) от P_μ.

4. В силу соотношений (2) – (4) $d\mu^{(p)}_{SS}(y) \sim \sum_e C_e(y)\Phi_e(y)\,\theta[e]^4(y)$. Наша гипотеза состоит в том, что

$$C_e(y) \sim \epsilon_e[\Phi_e(y)]^{-1}, \tag{5}$$

где $\epsilon_e = \pm 1$ – некоторые фазовые факторы (см. ниже). Конечно, в (5), как и в (1) имеются множители, зависящие от y, но не от характеристики e. Если эта гипотеза верна, то обращение $d\mu^{(p)}_{SS}(y)$ в нуль обеспечивается просто тождеством Римана

$$\sum_e \epsilon_e\theta[e]^4(y) \equiv 0 \tag{6}$$

и не зависит больше ни от чего, в частности от выбора метрики на римановой поверхности. В противном случае должно было бы существовать тождественное соотношение между θ-константами и вычетами голоморфных дифференциалов, что вряд ли возможно. Отметим еще, что формула (5) тривиально справедлива для случая $p = 1$, когда $\Phi_e = 1$.

Следует еще отметить, что наши рассуждения опираются исключительно на свойства систем нулей (дивизоров) θ-констант и потому являются более простыми, чем возможный подход к определению $C_e(y)$ основанный на исследовании модулярных свойств $d\mu^{(p)}_{SS}(y)$. В частности, модулярные свойства вычетов голоморфных дифференциалов довольно сложны. Даже в бозонном случае из модулярных свойств удалось найти только формулы для $p \leqslant 4$ [1 б], в то время как выражения, следующие из свойств дивизоров, известны для всех p [1 в] (но используют, возможно, излишнюю информацию о параметризации римановых поверхностей).

5. Докажем теперь формулу (6). Дело в том, что при $p \geqslant 2$ имеется много независимых соотношений Римана между четвертыми степенями четных θ-констант. (Число этих соотношений равно $\frac{4^p-1}{3}$, соответственно, линейно независимы лишь $\frac{(2^p+1)(2^{p-1}+1)}{3}$ из общего числа $2^{p-1}(2^p+1)\theta[e]^4$. В формуле (6), видимо, должно возникать тождество в которое все четные θ-константы входят равноправно, т. е. все множители ϵ_e – чисто фазовые: $|\epsilon_e| = 1$. К сожалению, такое представление тождеств Римана а приори не обязано существовать, и его приходится специально выводить. На самом деле, если представить характеристику в виде $e = \begin{bmatrix}\delta_1 \dots \delta_p\\ \epsilon_1 \dots \epsilon_p\end{bmatrix}$, то

$$\sum_e (-1)^{\delta_1+\epsilon_1}\theta[e]^4 \equiv 0. \tag{7}$$

Остальные тождества получаются из него модулярными преобразованиями (фактически достаточно преобразований из фактор-группы $Sp(p, Z)/(Sp(p, 2Z)$ тождества Римана инвариантны относительно преобразований, задаваемых симплектическими матрицами с четными коэффициентами). Тождество (7) является тривиальным следствием известного соотношения [3]

$$\theta\left[{\delta \atop \epsilon}\right]^2(\tau) = \sum_\alpha \theta\left[{\alpha \atop 0}\right](2\tau)\theta\begin{bmatrix}\alpha+\delta\\ 2\epsilon\end{bmatrix}(2\tau) = (-1)^{\epsilon\delta}\sum_\alpha(-1)^{\alpha\epsilon}\theta\left[{\alpha \atop 0}\right](2\tau)\theta\left[{\alpha+\delta \atop 0}\right](2\tau), \tag{8}$$

выражающего $\theta(\tau)$ с произвольной характеристикой через θ с характеристиками $\left[{\delta \atop 0}\right]$, но зависящие от удвоенного параметра 2τ. (τ – симметрическая $p\times p$ матрица с положительно определенной мнимой частью – элемент пространства Зигеля. В формулы для струнных амплитуд входят τ, являющиеся матрицами периодов на римановых поверхностях рода p, см. [1]). Для вывода (7) достаточно подставить в него четыре возведенных в квадрат выражения (8) с $\begin{bmatrix}\delta_1 \delta \\ \epsilon_1 \epsilon\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\,\delta \\ 0\,\epsilon\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}0\,\delta \\ 1\,\epsilon\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1\,\delta \\ 0\,\epsilon\end{bmatrix}; \begin{bmatrix}1\,\delta \\ 1\,\epsilon\end{bmatrix}$. Приводя подобные члены в суммах по α легко убедиться, что получается тождественный нуль. Само соотношение (8) получается из определения

$$\theta\begin{bmatrix}\delta \\ \epsilon\end{bmatrix}^2(\tau) \equiv \sum_{m \in Z^p} \exp i\pi\left[\left(m + \frac{\delta}{2}\right)\tau\left(m + \frac{\delta}{2}\right) + \left(m + \frac{\delta}{2}\right)\epsilon\right] \cdot$$

$$\cdot \sum_{n \in Z^p} \exp i\pi\left[\left(n + \frac{\delta}{2}\right)\tau\left(n + \frac{\delta}{2}\right) + \left(n + \frac{\delta}{2}\right)\epsilon\right]$$

переходом к суммированию по переменным $u_i = 2^{-1}(m_i + n_i)$ и $v_i = 2^{-1}(m_i - n_i)$, принимающим одновременно целые или полуцелые значения. При этом нужно воспользоваться формулой суммирования

$$\left(\sum_{u_1 v_1 \in Z} + \sum_{u_1 v_1 \in Z + \frac{1}{2}}\right) \ldots \left(\sum_{u_p v_p \in Z} + \sum_{u_p v_p \in Z + \frac{1}{2}}\right) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^p} \sum_{u, v \in Z^p + \frac{\alpha}{2}} .$$

Литература

1. а – *Belavin A., Knizhnik V.* Phys. Lett., 1986, **168B**, 201; Landau Institute preprint, 1986. б – *Белавин А.А., Книжник В.Г., Морозов А.Ю., Переломов А.М.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 319; Preprint ITEP-59, 1986. в – *Манин Ю.И.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 161; Morozov A. Preprint ITEP-88, 102, 1986.
2. *Alvarez-Gaumé L., Moore G., Vafa C.* Harvard Preprint, HUTP-86/A017.
3. *Mumford D.* Tata Lectures on Theta; Birkhauser, 1983. *Fay J.D.* Theta Functions on Riemann Surfaces; Springer, 1973 (LNM, № 352); *Клеменс Г.* Мозаика теории комплексных кривых. М.: Мир, 1984.
4. *Knizhnik V.* Europhysics Letters, 1986; to appear.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
10 июля 1986 г.