Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 4, стр. 209 – 212 *25 августа 1986 г.*

КВАНТОВАНИЕ МАССЫ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ В ТЕОРИИ СТРУНЫ

Я.И.Коган

Обсуждается возможное квантование массы черной дыры по закону $M \sim M_p\sqrt{n}$ в теории струн, основанное на условии согласованного описания движения пробной струны во внешнем поле черной дыры. Рассматривается возможная связь с эффектом Хокинга.

В настоящее ремя теория суперструн [1, 2] является, по-видимому, кандидатом на роль единой теории всех взаимодействий, включая и квантовую гравитацию. Однако современное развитие теории струн не позволяет непосредственно изучать квантовые свойства непертурбативных объектов, например, черных дыр, более того не ясно даже, существуют ли последние в рамках теории струн. Последовательное описание таких объектов заключалось бы в построении когерентных стационарных состояний струн-гравитонов, среднее значение метрики которых было бы равно метрике черной дыры. Такого построения пока не существует и единственным методом изучения является метод внешнего поля [3], в котором рассматривается струна в некотором заданном внешнем поле, иными словами струна является пробным объектом.

Требование конформной инвариантности соответствующей двумерной теории поля, описывающей движение пробной струны [4], или, что то же самое, равенство нулю β-функции, накладывает определенные ограничения на внешнее поле, являющиеся, по существу, уравнениями движения для соответствующих полей [3]. В этой статье будут рассмотрены некоторые ограничения на метрику черной дыры, следующие из другого принципа — принципа разделения левых и правых мод струны в заданном внешнем гравитационном поле, приводящего к квантованию радиуса Шварцшильда, а тем самым и массы черной дыры. Для простоты будет обсуждаться бозонная струна, которая в этом случае приводит к тем же результатам, что и суперструна.

1. Рассмотрим струну во внешнем поле черной дыры. Критическая размерность пространства в этом случае $D = 26$ ($= 10$ для фермионных струн). После компактификации вакуумное состояние имеет вид $M^4 \times K^{D-4}$, где K — компактное многообразие (или орбифолд). В случае черной дыры M^4 надо заменить на пространство с метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 , \tag{1}$$

где r_g — радиус Шварцшильда (гравитационный радиус).

При этом многообразие K остается неизменным, поэтому можно ограничиться только рассмотрением четырехмерного сектора (во всех дальнейших формулах вклады остальных $D-4$ измерений будут для краткости опускаться). Действие замкнутой струны во внешнем поле имеет вид

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau g_{\mu\nu}(x) \partial_a x^\mu \partial_a x^\nu , \qquad a = 1, 2, \quad \mu, \nu = 1, .., 4 \tag{2}$$

и для положительности действия необходимо сделать аналитическое продолжение в евклидову область $t \to i t$, т. е. рассмотреть вместо (1)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \tag{1'}$$

Эта метрика при $r \geqslant r_g$ описывает гладкое многообразие с топологией $R^2 \times S^2$ (или $S^2 \times S^2$ при компактификации бесконечности), причем t является угловой переменной с периодом $4\pi r_g$ [5]. Это легко увидеть, сделав при $r \to r_g$ замену $r = r_g + y^2$, тогда метрика принимает вид: $ds^2 \sim dy^2 + (y/2r_g)^2 dt^2 + r_g^2 d\Omega^2 + O(y)$ откуда видно, что сигнулярность при $y = 0$ является координатной сигнулярностью полярной системы координат в центре плоскости.

Рассмотрим уравнения движения следующие из (2):

$$\partial_a \partial_a x^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x) \partial_a x^\nu \partial_a x^\rho = 0 \tag{3}$$

или

$$\partial^2_{z\bar{z}} x^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}(x) \partial_z x^\nu \partial_{\bar{z}} x^\rho = 0,$$

при $z = \sigma + \tau$, $\bar{z} = \sigma - \tau$ (при аналитическом продолжении $z = \sigma + i\tau$). Легко видеть, что (3) допускает решения вида

$$x_L = x(z) = x(\sigma + \tau), \qquad x_R = x(\bar{z}) = x(\sigma - \tau). \tag{4}$$

При квантовании струны необходимо разложить решения (4) по осцилляторам (см., например, [1]), которое имеет вид

$$x^\mu_R(\sigma, \tau) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu_R (\sigma - \tau) + \frac{i}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{2in(\sigma - \tau)} \tag{5}$$

с коммутационными соотношениями

$$[x^{\mu},\ p_R^{\nu}] = i\delta^{\mu\nu}, \qquad [a_n^{\mu},\ a_m^{\nu}] = 2\alpha' n\,\delta_{n+m,\,0}\,. \tag{6}$$

Так как в нашем случае $x^0 = t$ – угловая переменная, то спектр оператора p_R^0 – дискретный и его собственные значения имеют вид

$$p_R^0 = n/2r_g, \qquad n = 0,\ \pm 1, \ldots \quad . \tag{7}$$

Кроме этого существует еще одно условие на p_R^0, связанное с тем, что мы рассматриваем замкнутые струны, поэтому $x^{\mu}(0,\tau) = x^{\mu}(\pi,\tau)$, но в случае $\mu = 0$ возможно обобщение условия замкнутости, $x^0(0,\tau) = x^0(\pi,\tau) + 4\pi m r_g$, $m = 0, \pm 1, ..$, откуда следует:

$$p_R^0 = 2mr_g/\alpha'\,. \tag{8}$$

По-видимому, не имеет смысла рассматривать $|m| > 1$, так как эти состояния нестабильны (они распадаются на состояния с $|m| = 1$, которые уже не могут распадаться только в состояния с $m = 0$), поэтому их рассмотрение в евклидовом секторе может оказаться незаконным, что оставляет $|m| = 1$. Из двух условий (7) и (8) немедленно следует условие квантования гравитационного радиуса

$$r_g^2 = \frac{\alpha'}{4}n\,, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

эквивалентное условию квантования массы черной дыры

$$M_{B.H.} = \frac{\alpha'^{\,1/2}}{4G_N}\sqrt{n}, \qquad n = 0, 1, \ldots \quad . \tag{9'}$$

2. Приведенные выше аргументы указывают на то, что впоследовательной квантовой теории масса черных дыр. должна быть квантована. Более строгие аргументы могли бы быть получены в рамках подхода, основанного на σ-модельном рассмотрении струны во внешнем поле, т. е. изучении 2-х мерной квантовой теории поля вида

$$\int Dx^{\mu}(\sigma,\tau)\, e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\sigma d\tau g_{\mu\nu}(x)\partial_a x^{\mu}\partial_a x^{\nu} + ..} \tag{10}$$

в случае бозонной струны и его суперобобщения для суперструны.

Приведенные выше аргументы можно в новых терминах сформулировать в виде следующей гипотезы.

Суперсимметричная сигма-модель, описывающая суперструну (либо гетеротическую струну) во внешнем поле с метрикой (1′) конформно-инвариантна только при значениях r_g удовлетворяющих условию квантования (9). Т. е. β-функция $\beta(r_g)$ зануляется ровно при этих значениях r_g. Вообще говоря, в этих моделях β-функция многозарядная [6], что связано с изменением вида внешней метрики при перенормировках, однако в случае метрики Шварцшильда вид метрики сохраняется и перенормируется только константа связи r_g, что является отражением теоремы Бирхгофа о сферически симметричных решениях уравнений Эйнштейна.

Рассматриваемая модель имеет инстантонные решения, так как поля принимают значения на многообразии $S^2 \times S^2$. В координатах Крускала действие приобретает вид:

$$U = (r/r_g - 1)^{1/2}\, e^{\frac{r+it}{2r_g}}, \qquad r \geqslant r_g$$

$$\mathcal{L} = \frac{4r_g^3}{r}\, e^{-r/r_g}\,\partial_z U \partial_{\bar z} U^* + r^2(|\partial_z\theta|^2 + \sin^2\theta\,|\partial_z\varphi|^2)\,. \tag{11}$$

$$4r_g^3/r\exp(-r/r_g) = f(|U|^2)\,.$$

Уравнения движения для U имеют вид

$$f(|U|^2)\partial^2_{z\bar{z}} U + f'(|U|^2)U^* \partial_{\bar{z}} U \partial_z U = 0,$$

откуда видно, что классические решения есть голоморфные функции, как и в $0(3)$ модели [7]

3. В заключение обсудим некоторые следствия квантования массы черной дыры. Разность масс двух соседних уровней $n+1$ и n равна $M_{n+1} - M_n = \alpha'/32G_N^2 M^{-1}_{B.H.}$, следовательно при переходах между этими уровнями будут испускаться кванты с характерной энергией $\epsilon = M_{n+1} - M_n$, зависимость которой от $M_{B.H.}$ аналогична зависимости хокинговской температуры испарения $T_H = \frac{1}{8\pi G_N} M^{-1}_{B.H.}$, пропорциональной характерной энергии тепловых квантов. Таким образом можно надеяться описать процесс испарения черных дыр в теории струн, для чего необходимо построить формализм в котором внешнее поле было бы разным в *in* и out состояниях. Дальнейшее обсуждение этих вопросов будет представлено в подробной статье. Отметим еще, что аналогичную формулу для спектра можно получить если применить правила квантования Бора – Зоммерфельда к евклидовому действию черной дыры [5] $S_{B.H.} = 4\pi G_N M^2_{B.H.} = 2\pi n$, причем получится вообще говоря другой коэффициент пропорциональности перед $n^{1/2}$, однако если потребовать полного совпадения с (9) то можно связать α' и G_N.

В заключение мне приятно поблагодарить А.Д.Долгова, В.Г.Книжника, В.М.Муханова, А.Ю.Морозова, К.А.Тер-Мартиросяна и М.А.Шифмана за интересные обсуждения.

Литература

1. *Schwarz J.H.* Phys. Rep., 1982, **89**, 223; *Green M.B.* Surveys in High Energy Phys., 1983, **3**, 127.
2. *Green M.B., Schwarz J.H.* Phys. Lett., 1985, **149B**, 117; *Gross D., Harvey J. Martinec E., Rohm R.* Nucl. Phys., 1985, **B256**, 253.
3. *Lovelace C.* Phys. Lett., 1984, **135B**, 75; *Candelas P., Horowitz G., Strominger A., Witten E.* Nucl. Phys., 1985, **B256**, 46. *Fradkin E., Tseytlin A.* Lebedev preprint, 1984,
4. *Polyakov A.M.* Phys. Lett., 1981, **103B**, 207.
5. *Hawking S.W.* In: Recent developments in gravitation, Carges, 1978.
6. *Friedan D.* Ann. of Phys. 1985, **163**, 318.
7. *Белавин А.А., Поляков А.М.* Письма в ЖЭТФ, 1975, **22**, 503.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
25 июня 1986 г.