Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 5, стр. 237 – 239 *10 сентября 1986 г.*

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КЛАССИЧЕСКОЙ XY-ЦЕПОЧКИ

Я.И.Грановский, А.С.Жеданов

Найден интеграл стационарного уравнения Ландау – Лифшица для дискретной XY-цепочки, вследствие чего задача оказывается интегрируемой. Дан явный вид решений, найдена их энергия, построен фазовый портрет.

Среди динамических задач, в которых может возникать стохастическое поведение [1], в последнее время особый интерес привлекла задача о стационарных состояниях цепочки двумерных классических спинов (XY-модель). Она подверглась численному анализу в работах [2,3], где были высказаны противоречивые суждения: авторы [2] считают задачу интегрируемой, а в [3] утверждается полная хаотизация решений.

Между тем, эта задача допускает точное решение, которое представлено в настоящей работе.

Гамильтониан XY-модели есть

$$\mathcal{H} = -\sum_n (\mathbf{S}_n, \hat{J}\mathbf{S}_{n+1}), \tag{1}$$

где $\mathbf{S}_n = (S_n^x, S_n^y) = (\cos\theta_n, \sin\theta_n)$ – вектор единичной длины, а матрицу обменных констант $\hat{J}$ без ограничения общности можно выбрать в виде

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \qquad J > 1.$$

Стационарные состояния гамильтониана (1) описываются уравнением Ландау – Лифшица

$$[\mathbf{S}_n, \hat{J}(\mathbf{S}_{n-1} + \mathbf{S}_{n+1})] = 0, \tag{2}$$

которое представляет собой нелинейное разностное уравнение второго порядка, и его можно рассматривать как отображение пространства спинов на себя.

В соответствии с уравнением (2), $(n+1)$-й вектор спина можно выбрать двумя способами: либо

$$\mathbf{S}_{n+1} = -\mathbf{S}_{n-1}, \tag{3}$$

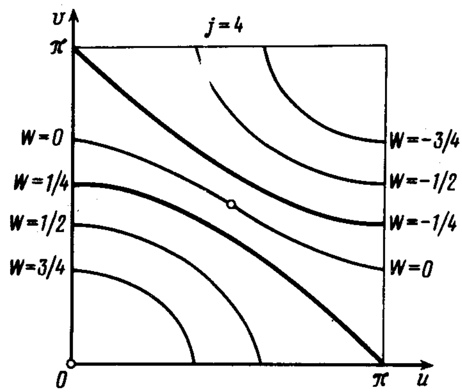
либо так, чтобы выражение

$$W = (\mathbf{S}_n, \hat{J}^{-1}\mathbf{S}_{n+1}) \tag{4}$$

не зависело от номера n.

Рассмотрим только последний (так называемый регулярный) случай. Общее решение, очевидно, склеено из регулярных кусков разной длины, отличающихся знаками W (операция (3) изменяет знак W).

Таким образом, для регулярных решений выражение (4) является интегралом уравнения (2).



На фазовой плоскости переменных

$$u = \theta_n + \theta_{n+1}, \qquad v = \theta_n - \theta_{n+1}$$

соотношение (4) задает семейство фазовых кривых

$$(1 + J^{-1})\cos v + (1 - J^{-1})\cos u = 2W, \tag{5}$$

отличающихся значением параметра W. Достаточно изучить фазовый портрет в квадрате $0 \leqslant u, v \leqslant \pi$ (рисунок, $J = 4$). Фазовые кривые с $W > 0$ и $W < 0$ симметричны друг другу относительно центра этого квадрата. На языке спинов эта симметрия сводится к отображению

$$\mathbf{S}_n |_{W<0} = (-1)^n \mathbf{S}_n |_{W>0}. \tag{6}$$

Области параметров $0 \leqslant W < J^{-1}$ отвечает решение

$$S_n^x = \operatorname{cn}(qn + \varphi_0; k), \qquad S_n^y = \operatorname{sn}(qn + \varphi_0; k), \tag{7}$$

где q, k удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{dn}(q;k) = J^{-1}\,; \qquad k^2 = \frac{1 - J^{-2}}{1 - W^2} \tag{8}$$

Это решение описывает структуру с полным разворотом спина, причем ее период, вообще говоря, несоизмерим с шагом решетки.

В области значений $J^{-1} < W < 1$ эллиптический модуль $k^2 > 1$, и соответствующее решение описывает спины, колеблющиеся вокруг трудной оси с угловой амплитудой $\theta_1 = \arcsin(1/k)$. Впрочем, можно дать и явные выражения для этого случая;

$$S_n^x = \mathrm{dn}(qn + \varphi_0\,;\,k), \qquad S_n^y = k_1\,\mathrm{sn}(qn + \varphi_0;\;k_1), \tag{7a}$$

$$\mathrm{cn}(q;\;k_1) = J^{-1}\,; \qquad k_1 = 1/k. \tag{8a}$$

Сепаратрисе, разделяющей эти решения $(W = J^{-1}$, т. е. $k = k_1 = 1)$, отвечает решение типа доменной стенки Ландау – Лифшица [4]

$$S_n^x = 1/\mathrm{ch}\,(qn + \varphi_0), \qquad S_n^y = \mathrm{th}\,(qn + \varphi_0), \quad \mathrm{ch}\,q = J. \tag{9}$$

Энергия полученных решений

$$\mathcal{E} = -\sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{S}_n,\ \hat{J}\,\mathbf{S}_{n+1})$$

вычисляется точно (ср. [5]): так, для решения (7) имеем

$$\mathcal{E} = -N\left[\mathrm{cn}\,q + \frac{(J - J^{-1})E(q)}{k^2\,\mathrm{sn}\,q}\right] + \frac{J - J^{-1}}{k^2\,\mathrm{sn}\,q}\,[E(qN + \varphi_0) - E(\varphi_0)]\,, \tag{10}$$

где $E(u)$ – эллиптический интеграл второго рода.

При $k \to 1$ $(W \to J^{-1})$ получаем энергию куска доменной стенки, состоящей из N спинов:

$$\mathcal{E}_{\text{дс}} = \sqrt{J^2 - 1}\,[\,\mathrm{th}\,(qN + \varphi_0) - \mathrm{th}\,\varphi_0\,]\,. \tag{11}$$

Таким образом, показана полная интегрируемость задачи о стационарных решениях XY-цепочки. В качестве интеграла выступает величина W (4). Именно наличие этого интеграла приводит к тому, что все последующие отображения спинов ложатся на фиксированную фазовую кривую. Для произвольных значений двух начальных спинов эта кривая заполняется всюду плотно [2].

Однако, в случае соизмеримости периода с шагом решетки кривая состоит из конечного числа точек. Для решения (7) условие соизмеримости означает, что $qm_1 = 4Km_2$ $(m_{1,2}$ – целые), где K – полный эллиптический интеграл первого рода, отвечающий модулю k. Авторы [3] приняли возникновение несоизмеримости за начало хаотизации решения, что не отвечает действительности.

Свойство интегрируемости стационарных решений спиновых цепочек не ограничено только двумерными спинами: можно показать, что для классической XYZ-цепочки, наряду с интегралом W, возникает еще один (дополнительный) интеграл уравнения Ландау – Лифшица [6].

Литература

1. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
2. *Белобров П.И., Белошапкин В.В., Заславский Г.М., Третьяков А.Т.* ЖЭТФ, 1984, **87**, 310.
3. *Thompson C.J. e. a.* Physica, 1985, **133A**, 330.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
5. *Грановский Я.И., Жеданов А.С.* ЖЭТФ, 1985, **89**, 2156.
6. *Грановский Я.И., Жеданов А.С.* ТМФ, 1987.

Донецкий
государственный университет

Поступила в редакцию
14 июля 1986 г.