ДЕФОРМАЦИЯ ХЕЛЬФРИХА В СМЕКТИКАХ А

В.Г.Каменский

Исследовано развитие неустойчивости смектика А в магнитном поле параллельном слоям. Показано, что в системе могут образовываться области, в которых слои периодически модулированы. Найдена амплитуда модуляции и характерные параметры, описывающие движение границ областей.

В гомеотропно ориентированном смектике А, имеющем положительную диамагнитную анизотропию χ_a, в магнитном поле H, параллельном смектическим плоскостям, может возникать деформация Хельфриха, заключающаяся в образовании периодического изгиба смектических слоев [1]. Причиной возникновения такой модулированной структуры является неустойчивость смектиков по отношению к возмущению их макроскопической однородности. Традиционное описание этого эффекта состоит в нахождении характерного периода конечной структуры и величины критического поля путем исследования усредненной по объему образца свободной энергии. При таком способе описания не существует возможности сделать какие-либо заключения об амплитуде модуляции и ее связи с начальным возмущением, а также о временны́х зависимостях установления конечной структуры. Поэтому представляется интересным изучение нелинейной динамики процесса, позволяющее, по крайней мере, дать качественные ответы на эти вопросы.

При описании нелинейной динамики смектика А, следуя работам [2, 3], используем переменную $W(\mathbf{r}, t)$, описывающую слоистую структуру ($W = \text{const}$ задает положение слоя молекул).

Плотность свободной энергии смектика А записывается в виде разложения по градиентам этой функции, главные члены которого имеют вид

$$F_W = \frac{B}{8}[l^2(\nabla W)^2 - 1]^2 + \frac{Kl^2}{2}(\nabla^2 W)^2 . \qquad (1)$$

Здесь l – равновесное расстояние между смектическими слоями, B и K – модули упругости. В равновесии $W_0 = z/l$ и описывает систему перпендикулярных оси z слоев.

При отклонении от равновесия удобно записать переменную W в виде

$$W = \frac{z + u}{l},$$

где u является смещением слоев вдоль оси z. В дальнейшем будет рассматриваться геометрия, когда смектический жидкий кристалл расположен между двумя ограничивающими поверхностями $z = 0$ и $z = d$, а магнитное поле направлено по оси x и однородно во всем образце. Таким образом, задача становится эффективно двумерной. Учет магнитного поля производится добавлением в (1) слагаемого $-\frac{1}{2}\chi_a(\mathbf{n}\mathbf{H})^2$, где директор $\mathbf{n}$ определяется равенством

$$\mathbf{n} = \nabla W/|\nabla W| .$$

Из уравнений гидродинамики смектика А [3] в пренебрежении теплопроводностью и просачиванием следует нелинейное уравнение движения для смещения u, которое в безразмерных переменных $Z = \frac{\pi}{d}z$, $X = \left(\frac{\pi\nu}{\lambda d}\right)^{1/2}x$, $T = \frac{8\nu\pi K}{\lambda d\eta}t$, $u = 2^{3/2}\nu^{1/2}\lambda\varphi$ (здесь ρ – плотность, η – соответствующий коэффициент вязкости, $\lambda = (K/B)^{1/2}$, $\nu = (H - H_c)/H_c$, $H_c = (2K\pi/\chi_a\lambda d)^{1/2}$) имеет вид

$$-\frac{2^6\rho K}{\eta^2}\varphi_{TT} + 4\varphi_{XX} + \nu^{-2}\varphi_{ZZ} - \frac{2H^2}{\nu H_c^2}\varphi_{XX} - \varphi_{XXXX} + 2^{5/2}\nu^{-1/2}\varphi_X\varphi_{XZ} + $$
$$+ \varphi_{XX}(12\nu\varphi_X^2 + 2^{3/2}\nu^{-1/2}\varphi_Z) = 0. \qquad (2)$$

Анализ линеаризованного уравнения (2) показывает, что при $2^{1/2}H_c > H \gtrsim H_c$, начальное состояние $\varphi = 0$ становится неустойчивым относительно возмущений $\delta\varphi \sim \exp(ikX + iqZ + \omega T)$ с $q = 1$, $k \sim k_c = \nu^{-1/2}$ (при этом $\omega \simeq 1$). Эти возмущения будут нарастать и в результате должна образоваться область квазипериодической структуры с длиной волны, близкой к $2\pi\nu^{1/2}$. Характер структуры и динамика ее образования определяются нелинейным уравнением (2). Для малой надкритичности $\nu \ll 1$, решение уравнения (2) может быть представлено в форме

$$\varphi = \sin\eta[V(X,T)\exp(i\nu^{-1/2}X) + V^*(X,T)\exp(-i\nu^{-1/2}X)], \qquad (3)$$

где V – зависящая от X и T и меняющаяся на масштабах $X, T \sim 1$ комплексная функция.

Подстановка выражения (3) в (2) дает для амплитуды V уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + V - V|V|^2, \qquad (4)$$

которое принято называть "амплитудным уравнением". Это уравнение применялось многими авторами для описания широкого класса физических явлений (см. [4–7] и цитированную там литературу).

Анализ уравнения (4) показывает, что его решение, соответствующее переходу от неустойчивого состояния $V = 0$ к стационарному устойчивому ограниченному состоянию, являетя действительным и представляет собой бегущую со скоростью $c = 2$ волну. Форма фронта волны определяется решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2V}{dy^2} + 2\frac{dV}{dy} + V - V^3 = 0.$$

Этот фронт описывает переход от состояния $V = 0$ к состоянию $V = \pm 1$.

В размерных переменных амплитуда модуляции образующейся периодической структуры $u_0 = \lambda(2\nu)^{1/2}$ и, поскольку $\lambda \sim l$, при малых надкритичностях она меньше расстояния между слоями (т. е. не происходит образования дефектов слоистой структуры). Как в области периодической структуры, так и в области фронта волны $u_z \sim \nu^{1/2}\lambda/d \ll 1$, $u_x \sim \nu(\lambda/d)^{1/2} \ll 1$ при $\lambda < d$. Таким образом при не слишком малой толщине образца выполняются условия вывода уравнения (2).

Исходя из линеаризованного уравнения (4) можно оценить характерное время образования фронта, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$T \sim -\ln|Z_0(0)|,$$

где $Z_p(0)$ есть фурье-образ $Z(X,T)$ при $T = 0$.

Литература

1. *Де Жен П.* Физика жидких кристаллов, М.: Мир, 1977.
2. *Воловик Г.Е., Кац Е.И.* ЖЭТФ, 1981, **81**, 240.
3. *Кац Е.И., Лебедев В.В.* ЖЭТФ, 1983, **85**, 2019.
4. *Newell A.C., Whitehead J.A.* J. Fluid Mech., 1969, **38**, 279.
5. *Dee G., Langer J.S.* Phys. Rev. Lett., 1983, **50**, 383.
6. *Dee G.* Physica, 1985, **15D**, 295.
7. *Hohenberg P.C., Langer J.S.* J. Stat. Phys., 1982, **28**, 193.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
16 июля 1986 г.