Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 5, стр. 242 – 244 *10 сентября 1986 г.*

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ АВТОСТРУКТУРЫ В ДВУМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А.В.Гапонов-Грехов, А.С.Ломов, М.И.Рабинович

Предложена модель, описывающая рождение в однородных диссипативных средах устойчивых локализованных в пространстве образований – автоструктур [1, 2]. Сформулированные уравнения являются обобщением модели Свифта – Хохенберга [3] на двухкомпонентные среды. Выяснены физические механизмы, приводящие к установлению в неравновесных средах структур в виде уединенных многогранников.

1. Возможно ли самозарождение в двумерных однородных средах локализованных структур (детерминированных образований), не зависящих от внешних организующих воздействий? Имеющиеся эксперименты (см., например, [2 – 5]) не дают прямого ответа на этот вопрос – присутствующие в каждой реальной ситуации пространственные макро- или микронеоднородности, локализованные источники и т. д. затрудняют однозначную интерпретацию природы наблюдаемых образований.

Принципиальная возможность самозарождения в двумерных неравновесных средах нетривиальных локализованных структур может быть доказана с помощью построения феноменологической модели, в рамках которой такие устойчивые образования обнаруживаются.

Подобная модель изотропной однородной среды предлагается в настоящей работе.

2.Имея в виду, что нетривиальные автоструктуры в виде многогранников наблюдаются при термоконвекции в неоднородно подогреваемом слое жидкости [2], возьмем за основу искомой модели известное уравнение Свифта – Хохенберга [3, 6]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\kappa(\mathbf{r}) - (1 + \nabla^2)^2]u + \beta u^2 - u^3 . \tag{1}$$

При $\kappa = \text{const} > 0$ это уравнение описывает формирование пространственно однородных решеток и движение дефектов в двумерных моделях трехмерной конвекции [3, 6]. Как показали наши численные эксперименты, это же уравнение, но при неоднородном в пространстве инкременте $\kappa = -\alpha + v(\mathbf{r})$, может служить моделью рождения уединенных элементарных автоструктур в виде "многогранников" в слое жидкости с локализованным подогревом. Рассчитанная форма ячеек совпадает с наблюдавшейся в [2].

Для построения самосогласованной модели, описывающей рождение локализованных автоструктур в однородной среде (т. е. модели без заданных неоднородностей), следует дополнить (1) уравнением для $v(\mathbf{r}, t)$, с параметрами, не зависящими от координат, но которое при учете связи с u имело бы пространственно локализованные решения, соответствующие неоднородному подогреву. В качестве такого уравнения естественно использовать уравнение однородной нелинейной среды с тепловыделением и диффузией [7] и дополнительным источником $\sim \delta u$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v - \gamma v^3 + D\Delta v + \delta u. \tag{2}$$

Это уравнение при $\delta = 0$ имеет локализованные решения. Они, однако, неустойчивы – в зависимости от вида наложенных возмущений возбуждение либо затухает, либо переходит в однородное решение $v^0 = 1/\sqrt{\gamma}$. Подобные локализованные решения могут оказаться, тем не менее, устойчивыми в самосогласованной задаче, например, когда тепловыделение на периферии локализованного решения $v(\mathbf{r}, t)$ подавляется полем $u(\mathbf{r}, t)$. Таким образом мы приходим к следующей модельной системе:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [(v - \alpha) - (1 + \nabla^2)^2]u + \beta u^2 - u^3, \tag{3}$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t} = v - \gamma v^3 + \delta u + D\Delta v .$$

Чтобы подтвердить правильность наших представлений о самозарождении локализованных образований в однородной среде, приведем в начале результаты для случая малых β. Автоструктуры здесь действительно образуются – в рассматриваемой области параметров они имеют форму дисков, характерный размер и стационарная интенсивность которых определяются только параметрами среды и не зависят от граничных и начальных условий (см. рис.1, *а*).

Число и взаимное расположение автоструктур, возникающих в достаточно протяженной двумерной среде, описываемой (3), определяется случайными начальными условиями. Однако они не могут сближаться более, чем на масштаб подавления $l_п$, который соответствует характерному размеру пограничной с автоструктурой области, где поле u отрицательно (см. рис. 1, *б*). Наличие такой области определяется особенностями диффузии u (слагаемые $(2\Delta u + \Delta^2 u)$ в (2))[1]. В области подавления неравновесная среда не самовозбуждается, что и гарантирует устойчивость эффекта самолокализации двумерного поля u, v.

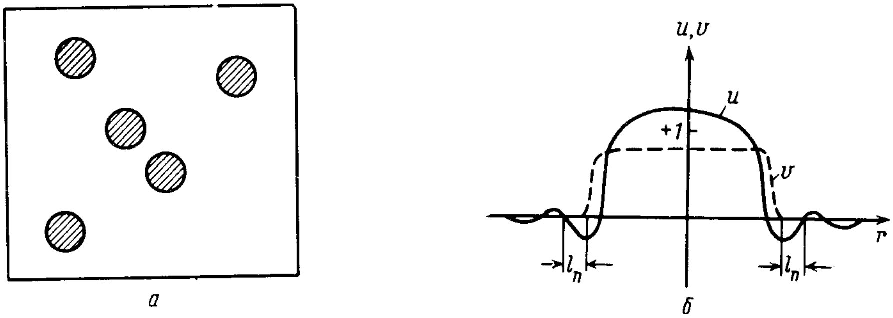

Рис. 1

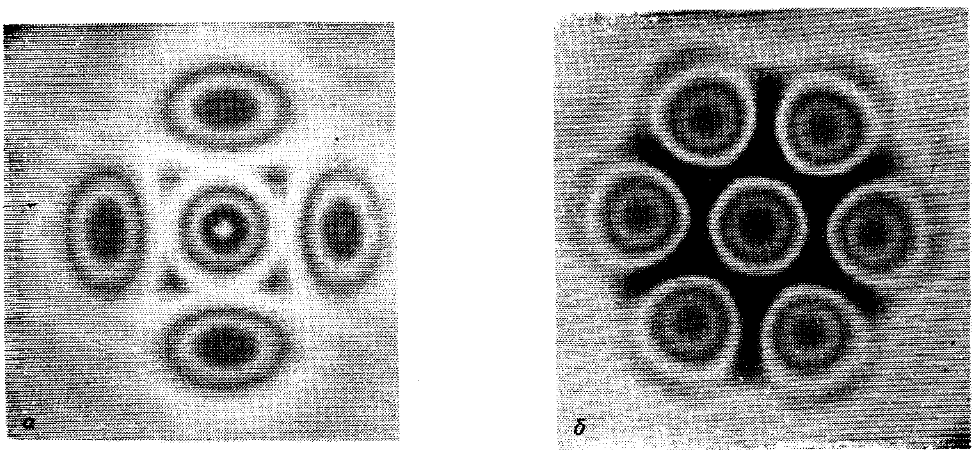

Рис. 2

Рис. 1. *а* – Автоструктуры в виде дисков в системе (3) при $\beta = 0{,}9$ (значения остальных параметров см. в п. 3); *б* – распределение поля $u(\mathbf{r})$ для автоструктуры в виде диска ($\beta = 0{,}9$)

Рис. 2. Автоструктуры в виде многогранников в системе (3) при $\beta = 1{,}5$ и различных начальных условиях ($\alpha = 0{,}3$; $\mu = 0{,}05$, $\gamma = 4$, $\delta = 0{,}15$, $D = 0{,}3$) : *а* – четырехгранник – начальное возбуждение $u(r_0 t_0) \approx$ $\approx 0{,}75$ задано внутри круга радиусом $R < 7{,}0$; *б* – шестигранник – начальное возбуждение задано в круге радиусом $R > 8{,}5$

---

[1] Суперпозиция слагаемых $\nabla^2 u$ и $\nabla^4 u$ фактически означает существование в среде независимого и пространственного масштаба – т. е. пространственной дисперсии.

Нетривиальность формы автоструктур определяется разнообразием линейных возбуждений, которые служат затравкой для последующего нелинейного роста и формирования автоструктуры. Простейшие нетривиальные структуры с центром симметрии – это многогранники. Они получаются в результате взаимодействия лишь двух мод круглой мембраны – радиальной и азимутальной. В частности, автоструктуры в виде уединенных шестигранников и восьмигранников, наблюдавшиеся в [2], можно рассматривать как результат взаимодействия именно таких мод. Согласно [2], определяющую роль в рождении уединенных многогранников играет нелинейность, связанная с зависимостью поверхностного натяжения жидкости от температуры. В модели (3) подобная нелинейность учтена слагаемым βu^2. Такая нелинейность обеспечивает устойчивость режима совместной генерации мод, которые при малых β конкурируют друг с другом.

Высказанные соображения говорят в пользу того, что в однородных неравновесных средах, описываемых уравнениями типа (3), возможно самозарождение и устойчивое существование локализованных многогранников. Численные эксперименты это доказывают (см. рис. 2).

3. Система (2) решалась прямым разностным методом при граничных условиях

$$u|_S = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{4}$$

в области с размерами 40×40. Контрольные счета проводились с уменьшением шага по времени на порядок, шага по координатам – вдвое. Счет проводился до выхода системы на стационарное решение, что обычно занимало до 80 единиц времени. Типичные значения параметров $\alpha \lesssim 0{,}5$; $\beta = 1{,}5$; $0{,}05 \leqslant \mu \leqslant 0{,}1$; $\gamma = 4$; $\delta = 0{,}15$; $D = 0{,}3$. При случайных начальных условиях в системе рождались многогранники с разным числом граней, хаотически разбросанные по всему полю.

Для выяснения областей "притяжения" различных структур начальные условия формировались специально. Было обнаружено, в частности, что при одних и тех же значениях параметров, в зависимости от начальных распределений поля в среде возможно установление либо одной из элементарных автоструктур в виде четырехгранника или шестигранника (см. рис. 2), либо их композиции в виде пятигранника. Ориентация многогранника в пространстве произвольна, а его параметры не меняются при изменении граничных условий и размеров области.

Таким образом, действительно самоорганизация двумерного поля в системе (3) приводит к установлению в однородной среде автоструктур в виде уединенных многогранников. Физические механизмы, лежащие в основе такой самоорганизации, связанные с видом нелинейности и особенностями диффузии, представляются достаточно общими и могут реализоваться в самых различных двухкомпонентных средах.

Литература

1. *Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И.* ЖЭТФ, 1985, **89**, 92.
2. *Вашкевич О.В., Гапонов-Грехов А.В., Езерский А.Б., Рабинович И.М.* ДАН СССР, 1986 (в печати).
3. *Greenside H.S., Coughran W.M.* Phys. Rev. A, 1984, **30**, 398.
4. *Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С.* УФН, 1982, **138**. 45.
5. *Pocheau A., Croquette V., Le Gal P.* Phys. Rev. Lett., 1985, **55**, 1094.
6. *Haken H.* Phys. Scripta, 1985, **T9**, 111.
7. *Курдюмов С.П.* Кн.: "Современные проблемы математической физики и вычислительной математики". М.: Наука, 1982.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
17 июля 1986 г.