Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 6, стр. 261 – 263 *25 сентября 1986 г.*

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ И НЕАБЕЛЕВЫ АНОМАЛИИ

С.Н.Вергелес

Предложена регуляризация калибровочных теорий, удовлетворяющая необходимым физическим требованиям и приводящая к отличным от общепринятых значениям неабелевых аномалий.

Аномальные расходимости токов играют фундаментальную роль в физике элементарных частиц. В этой статье мы предлагаем некую регуляризацию фермионных флуктуаций в калибровочных теориях, которая приводит к отличным от общепринятых [1 – 4] значениям (см. ниже (7)) вейлевских или неабелевых аномалий. Наша регуляризация соответствует регуляризации по энергии, которая используется в гамильтоновом формализме [5]. Таким образом, явно релятивистски инвариантные способы регуляризации в рамках диаграммного метода Фейнмана и регуляризация в гамильтоновом формализме, приводящие к унитарным и релятивистски инвариантным теориям, принципиально различны. Так как аномалия (7) приводит к менее "злокачественному" нарушению калибровочной инвариантности системы взаимодействующих калибровочного и правого (левого) вейлевского полей, то возникает реальная надежда на самосогласованное квантование такой системы (см. также [10]).

1. Рассмотрим в 3 + 1-мерном пространстве Минковского правое вейлевское поле $\varphi(x)$ во внешнем c-числовом калибровочном поле $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) t^a$. Фермионная часть действия имеет вид $S_\varphi = \int d^4 x \overset{+}{\varphi} (i\nabla_0 + i\sigma^i \nabla_i)\varphi$. Везде $\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$, σ^i – матрицы Паули, t^a – антиэрмитовы генераторы алгебры Ли калибровочной группы, греческие индексы четырехмерные, строчные латинские – трехмерные. Построим регуляризованную амплитуду перехода фермионов, которую обозначим $Z_+\{A_\mu\}$. Пусть $\{\varphi_N(x)\}$ – полный ортонормированный набор решений уравнения Вейля, т.е.

$$(i\nabla_0 + i\sigma^i \nabla_i)\varphi_N = 0, \tag{1}$$

$$\sum_N \varphi_N(t, \mathbf{x}) \overset{+}{\varphi}_N(t, \mathbf{y}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{2}$$

Везде $(t, \mathbf{x}) = (x)$. В силу условия полноты (2) произвольные поля $\varphi(x)$ и $\overset{+}{\varphi}(x)$ могут быть разложены по набору функций $\{\varphi_N(x)\}$ и $\{\overset{+}{\varphi}_N(x)\}$ с зависящими от времени коэффициентами $\{a_N(t), \bar{a}_N(t)\}$, набор которых можно считать полным набором грассмановых степеней свободы системы. В терминах этих переменных удобно регуляризовать фермионную амплитуду перехода. Для этого достаточно в разложениях полей $\varphi(x)$ и $\overset{+}{\varphi}(x)$ по функциям $\varphi_N(x)$ и $\overset{+}{\varphi}_N(x)$ отбросить ультрафиолетовые (по энергии) хвосты. Везде далее штрих над знаками суммирования и произведения по индексам N означает, что эти индексы *не* пробегают значений из ультрафиолетового хвоста. Определим регуляризованные ферми-поля следующим образом:

$$\varphi(x) = \sum_N{}' a_N(t)\varphi_N(x), \quad \overset{+}{\varphi}_N(x) = \sum_N{}' \bar{a}_N(t)\overset{+}{\varphi}_N(x). \tag{3}$$

Разобъем время на малые отрезки длины $\epsilon \to 0$: $t_{\kappa+1} = t_\kappa + \epsilon$. Согласно общим правилам, координатные переменные $\{a_N(t_\kappa)\}$ определены в моменты времени t_κ, а импульсные переменные $\{\bar{a}_N(t_\kappa + \epsilon/2)\}$ – в моменты времени $t_\kappa + \epsilon/2$. Регуляризованные фермионные мера и амплитуда перехода определяются согласно формулам

$$(D\bar{\psi}D\psi)_{P+} = \prod_\kappa \prod_N{}' \delta\bar{a}_N(t_\kappa + \epsilon/2)\, \delta a_N(t_\kappa), \tag{4}$$

$$Z_+\{A_\mu\} = \mathrm{const} \int (D\bar{\psi}D\psi)_{P+} \exp iS_\varphi.$$

Амплитуда перехода (4) унитарна, так как в переменных $\{a_N, \bar{a}_N\}$ гамильтониан фермионов равен нулю. После снятия обрезания релятивистская инвариантность также имеет место.

В точности аналогичным образом можно определить регуляризованные меру $(D\bar{\psi}D\psi)_{P-}$ и амплитуду перехода $Z_-\{A_\mu\}$ левого вейлевского поля $\chi(x)$.

Обозначим через $(D\bar{\psi}D\psi)_P$ регуляризованную меру безмассового дираковского поля $\psi(x)$ во внешнем c-числовом калибровочном поле. По определению положим

$$(D\bar{\psi}D\psi)_P = (D\bar{\psi}D\psi)_{P+}(D\bar{\psi}D\psi)_{P-}. \tag{5}$$

Так как для действия безмассового дираковского поля имеем $S_\psi = S_\varphi + S_\chi$, то из определений (4) и (5) следует, что

$$Z\{A_\mu\} = Z_+\{A_\mu\}\, Z_-\{A_\mu\}, \tag{6}$$

где $Z\{A_\mu\}$ – регуляризованная и P-четная амплитуда перехода безмассового дираковского поля.

2. Для вывода аномалий воспользуемся методом, предложенным автором в 1978 г. [6]. Метод заключается в том, что при замене переменных в функциональном интеграле следует учесть изменение функциональной меры, которое и дает аномалию в соответствующем тождестве Уорда. Впервые этот метод применялся в [7] (см. также [8]). В нашем случае в интеграле (4) следует сделать замену $\varphi \to \varphi + v\varphi$, $\overset{+}{\varphi} \to \overset{+}{\varphi} - \overset{+}{\varphi}v$, где поле $v(x) = v^a(x)\,t^a$ – бесконечно малый параметр преобразования. Прямым вычислением можно получить следующую формулу:

$$\nabla_\mu J_\varphi^{\mu a} = \frac{i}{32\pi^2}\, \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\, \mathrm{tr}\, t^a F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}, \tag{7}$$

где $J_\varphi^{\mu a}$ ($J_\chi^{\mu a}$) – ток, построенный из правого (левого) вейлевского поля φ (соответственно, χ).

Аналогичные манипуляции с интегралом (6) дают для токов $J^{\mu a} = \bar{\psi} i t^a \gamma^\mu \psi$ и $J_5^{\mu a} = \bar{\psi} i t^a \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ следующие равенства: $\nabla_\mu J^{\mu a} = 0$, а также $\nabla_\mu (J^{\mu a} - J_\varphi^{\mu a} - J_\chi^{\mu a}) = \nabla_\mu (J_5^{\mu a} - J_\varphi^{\mu a} + J_\chi^{\mu a}) = 0$. Последние соотношения немедленно следуют из факторизаций (5) и (6). Калибровочная инвариантность амплитуды (6) гарантирует унитарность и перенормируемость P-четной теории.

3. Полученное нами значение аномалии (7) противоречит уравнению самосогласованности Весса – Зумино [2], так как величина $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_+\{v\} = \int d^4x\, v^a \nabla_\mu \langle J_\varphi^{\mu a}\rangle$ не удовлетворяет этому уравнению. Покажем, как устраняется этот парадокс.

Пусть L_v – генератор калибровочного преобразования в пространстве Минковского: $[L_v, A_\mu(x)] = \nabla_\mu v(x)$. Имеем

$$L_v Z_+\{A_\mu\} = -i\,\mathcal{O}\!\mathcal{L}_+\{v\}\, Z_+\{A_\mu\}. \tag{8}$$

Мы постулируем новую алгебру Ли калибровочной группы, модифицировав коммутационные соотношения введением швингеровского члена:

$$[L_u, L_v] = L_{[u,v]} - h\ \frac{1}{32\pi^2}\ \int d^4x\,[u, v]^a \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}\,t^a F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}\,. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что коммутационные соотношения (9) удовлетворяют тождествам Якоби. Из уравнений (8) и (9) вытекает модифицированное уравнение самосогласованности Весса – Зумино:

$$L_u \mathfrak{A}_+\{v\} - L_v \mathfrak{A}_+\{u\} = \mathfrak{A}_+\{[u, v]\} - h\ \frac{i}{32\pi^2}\ \int d^4x\,[u, v]^a \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\mathrm{tr}\,t^a F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}\,. \tag{10}$$

При $h = 1$ величина $\mathfrak{A}_+\{v\}$, построенная согласно (7), удовлетворяет уравнению (10). Таким образом вышеупомянутый парадокс устраняется.

4. При переходе к евклидовскому пространству (для вычисления статистической суммы) следует пользоваться обычной температурной техникой (см. [9, гл. 3]), в рамках которой очевидным образом реализуется описанная здесь регуляризация и аномалия (7).

Автор благодарит А.А.Белавина и С.Б.Хохлачева за обсуждения.

Литература

1. *Bardeen W.A.* Phys. Rev., 1969, **184**, 1848.
2. *Zumino B., Yong-Shi W., Zee A.* Nucl. Phys., 1984, **B239**, 477.
3. *Zumino B.* Nucl. Phys., 1985, **B253**, 477.
4. *Alvarez-Gaumé L., Ginsparg P.* Nucl. Phys., 1984, **B243**, 449.
5. *Дирак П.А.М.* Лекции по квантовой теории поля, 1971, Москва; *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения, 1956, Москва.
6. *Вергелес С.Н.* Некоторые вопросы квантовой теории калибровочных полей. Канд. дисс., 1979, Черноголовка.
7. *Migdal A.A.* Phys. Lett., 1979, **81B**, 37.
8. *Fujikawa K.* Phys. Rev. Lett., 1979, **42**, 1195.
9. *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике, 1962, Москва.
10. *Фаддеев Л.Д., Шаташвили С.Л.* ТМФ, 1984, **60**, 206.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
3 июля 1986 г.