

“ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ” В РЕШЕТКЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Б.В.Левин, Б.А.Трубников

В опытах ¹ обнаружено, что на поверхности воды в сосуде с колеблющимся дном при определенных условиях возникают правильные структуры с гексагональными или квадратными ячейками, а также набор параллельных гребней. В работе изложена теория этого явления, обусловленного параметрическим резонансом.

1. В дрожащих сосудах с жидкостью иногда наблюдается рябь волн с правильной структурой. По-видимому, впервые это явление в 1831 г. описал Фарадей ². В опытах ³ на дрожащем тонком слое силиконового масла наблюдалась сетка волн из квадратов, тогда как в ¹ наблюдались три типа сеток – гексагональная, из квадратов и одномерная (рис. 1).

Это явление отчасти аналогично фазовому переходу в кристаллах, например, при превращении графита в алмаз, когда меняется тип решетки. Возможно также, что опыты ¹ можно рассматривать как лабораторное моделирование явления моретрясения, возникающего иногда при землетрясениях в океане. По сообщениям очевидцев (см. ⁴) при этом на поверхности моря на 10 – 60 с возникает сетка волн с длинами 10 – 20 м и частотами – 1 Гц. Не исключено, что при больших амплитудах возникает опасность и для кораблей. В частности сообщалось о гибели судов в открытом океане в районе очага Мексиканского землетрясения 1985 г.

Отметим также, что сходные, но стационарные структуры возникают на диэлектрической или ферромагнитной жидкости в вертикальных электрическом поле⁵⁻⁷ или магнитном поле⁸ (теорию см. в^{9,10}).

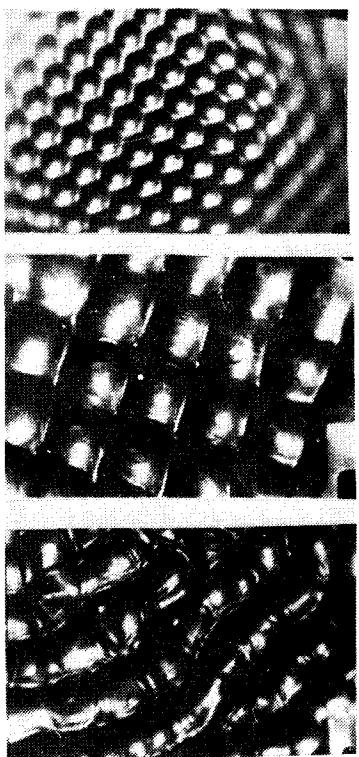


Рис. 1. Образцы кинограмм волновых решеток с гексагональными *a*, квадратными *b* и гребневыми *c* ячейками

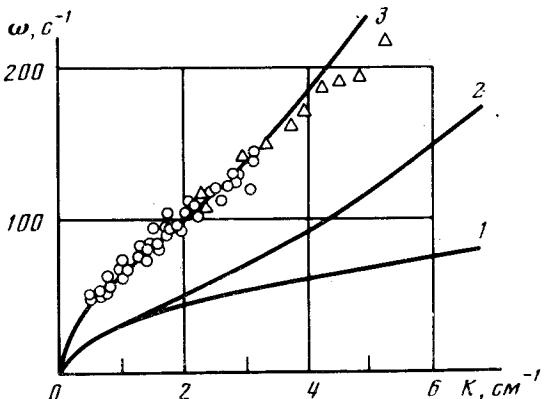


Рис. 2

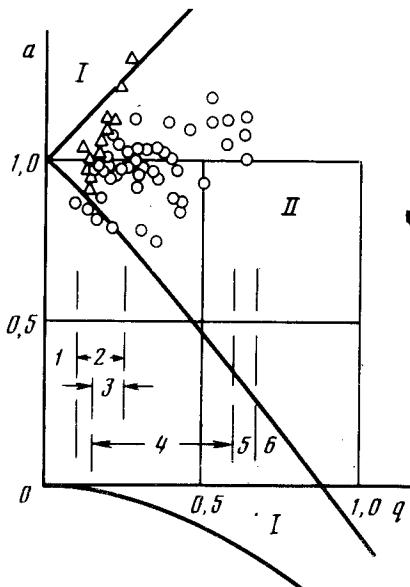


Рис. 3

Рис. 2. Сопоставление законов дисперсии для гравитационных *1*, гравитационно-капиллярных *2* и параметрических волн *3* с измеренными параметрами гексагональных (треугольники) и квадратных (кружочки) ячеек волновых структур

Рис. 3. Представление процесса формирования решеток в пространстве областей устойчивости *I* и неустойчивости *II* решений уравнения Матье: *1* – отсутствие решеток, *2* – гексагональные ячейки, *3* – область “фазовых переходов” в решетках, *4* – квадратные ячейки, *5* – ячейки типа гребней, *6* – область хаоса

2. Проделаем вначале элементарное рассмотрение. Волны на воде имеют закон дисперсии $\omega^2 = kg$ (кривая *1* на рис. 2), а при учете поверхностного натяжения σ закон $\omega^2 = kg + k^3 \times (\sigma/\rho)$ (кривая *2* на рис. 2). Если дно колеблется периодически по закону $\delta z = H_0(t) = H \cos \omega t$ со скоростью $v_0(t) = -\omega H \sin \omega t$ и ускорением $\ddot{g} = -\omega^2 H \cos \omega t$, то это ускорение следует добавить к ускорению силы тяжести, написав уравнение для возмущений

$$\ddot{h} + [k(g + \ddot{g}) + (\sigma/\rho) k^3] h = 0, \quad (1)$$

где точка означает частную производную по времени t . Это уравнение Матье (см. ¹¹) может описывать раскачку параметрических волн с "половинной" частотой (кривая 3 на рис. 2)

$$\omega_p = \frac{1}{2} \omega = \sqrt{kg + k^3(\sigma/\rho)} . \quad (2)$$

Для воды имеем $\sigma/\rho = 73 \text{ см}^3/\text{с}^2$ (см. ¹²), и как показано на рис. 2, экспериментально регистрируемые в опытах пары значений (ω, k) , где $k = 2\pi/\lambda$, а λ — наблюдаемый период решетки, хорошо согласуются с этим "параметрическим" законом дисперсии. Однако линейное приближение (1) не позволяет объяснить тип решетки и уровень установившихся колебаний, определяемые, как и в кристаллах, нелинейными эффектами.

Для нелинейного анализа следует записать поверхность в виде $z = z_0 = H_0(t) + H_1(x, y, z, t)$ и использовать уравнения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla \Psi, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, [\dot{\Psi} + \frac{1}{2} v^2 + gz + (p/\rho)]_{z_0} = F_0(t) \\ p|_{z_0} &= p_{\text{атм}} - \sigma \operatorname{div} (\mathbf{G}/\sqrt{1+Q}), v_z|_{z_0} = v_0 + \dot{H}_1 + (\mathbf{G}v)|_{z_0} \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где для краткости обозначено $\mathbf{G} = \nabla H_1$, $Q = G^2$.

3. Попытаемся решить эту систему, взяв потенциал в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = zu_0(t) + \psi, \quad \psi(x, y, z, t) = f(t)R(x, y) \exp(kz). \quad (4)$$

Если далее ввести безразмерные координаты $\xi = kx$, $\eta = ky$, $\vec{\rho} = \xi \mathbf{e}_x + \eta \mathbf{e}_y$, обозначив $\nabla_{\perp} = \partial/\partial \vec{\rho}$, а также ввести две функции $h = kH_1$ и $S = k^2 \psi|_{z_0}$, то интеграл Бернулли в (3) приведет к уравнению

$$\dot{S} + k(g + \delta g)h - \frac{\sigma}{\rho} k^3 \operatorname{div}_{\perp} (\mathbf{G}/\sqrt{1+Q}) = \frac{1+Q}{2} S^2 - \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} S)^2 + F_1(t), \quad (5)$$

где $F_1(t)$, как и $F_0(t)$ в (3), произвольна, но подлежит определению. Граничное же условие (3) дает соотношение $S = (h + \mathbf{G}\nabla_{\perp} h)/(1+Q)$ и если амплитуда мала ($h \ll 1$), то можно выразить S через h с точностью до кубичных членов в виде разложения

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots, \quad S_1 = \dot{h}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \dot{Q}, \quad S_3 = \frac{1}{2} \mathbf{G}\nabla_{\perp} \dot{Q} - Q\dot{h}, \quad (6)$$

подставляя которое в (5), окончательно получим уравнение для h

$$\left. \begin{aligned} \ddot{h} + k(g + \delta g)h - \frac{\sigma}{\rho} k^3 \Delta_{\perp} h &= A_2 + A_3 + F_1(t), \quad A_2 = \frac{1}{2} (\dot{h}^2 - \ddot{Q} - \mathbf{G}^2) \\ A_3 &= Q\ddot{h} + \frac{3}{2} \dot{Q}\dot{h} - \mathbf{G}\nabla_{\perp} \dot{Q} - \frac{1}{2} \mathbf{G}\nabla_{\perp} \ddot{Q} - (\sigma k^3/2\rho) \operatorname{div}_{\perp} (Q\mathbf{G}) \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

которое и определяет тип решетки.

4. Решение для (7) будем искать в виде суммы стационарных волн

$$h = T(t)R(\xi, \eta), \quad R = R_N = \sum_i c_i, \quad c_i = \cos(\mathbf{n}_i \cdot \vec{\rho}), \quad (8)$$

где \mathbf{n}_i — единичные орты направлений. Например, из набора ортов

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{n}_{2,3} = -\frac{1}{2} (\pm \sqrt{3} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 = 0 \quad (9)$$

Можно составить либо одномерный набор гребней $R_1 = c_0$, либо "паркет" из квадратов $R_2 = c_0 + c_1$, или из шестиугольников $R_3 = c_1 + c_2 + c_3$. При подстановке $h = TR_N$ в (7) получают

ся выражения

$$A_2 = \frac{1}{2} \dot{T}^2 R^2 - (T\ddot{T} + \frac{3}{2} \dot{T}^2)(\nabla_{\perp} R)^2, \quad A_3 = T[T\ddot{T} + 3\dot{T}^2 + T^2(\sigma k^3/2\rho)]D, \quad (10)$$

где $D = -\operatorname{div}_{\perp}[(\nabla_{\perp} R)^2 \nabla_{\perp} R]$. Однако, поскольку левая часть в (7) пропорциональна R , то и справа следует удержать лишь косинусы, входящие в R , отбросив все другие "нерезонансные" косинусы, что приводит в (10) к следующим "правилам замены" операторов

$$D_N \rightarrow \frac{3}{4} R_N \delta_N, \quad R_N^2 \rightarrow R_N \delta_{N,3}, \quad (\nabla_{\perp} R_N)^2 \rightarrow \frac{1}{2} R_N \delta_{N,3}, \quad (11)$$

где $\delta_N = 1 + \frac{1}{3}(N^2 - N)$, а $\delta_{N,3} = 1$ при $N = 3$ или $\delta_{N,3} = 0$ при $N \neq 3$.

Далее удобно ввести безразмерное время $\tau = \omega t/2$ и параметры

$$\alpha = \sigma k^3 / \rho \omega^2, \quad a = 4(kg\omega^{-2} + \alpha), \quad q = 2kH, \quad \epsilon = 2q/a, \quad (12)$$

а также функцию $\gamma(\tau) = 1 - \epsilon \cos 2\tau$, и тогда из (7) получим уравнения

$$M = M_3 \delta_N \text{ при } N = 1,2; \quad M = M_2 + 3M_3 \text{ при } N = 3, \quad (13)$$

где M – "стандартный" оператор Маттье $M = \ddot{T}(\tau) + a\gamma(\tau)T$ и где

$$M_2 = -\frac{1}{2} T\ddot{T} - \frac{1}{4} T'^2, \quad M_3 = \frac{3}{4} T(T\ddot{T} + 3\dot{T}^2 + 2aT^2). \quad (14)$$

Из этих уравнений можно видеть, что при малых $T \ll 1$ возможна лишь гексагональная решетка $N = 3$, при умеренных $T \gtrsim 1$ – квадратная $N = 2$, а при $T \gtrsim 1$ одномерная $N = 1$, и опыт подтверждает такую последовательность "фазовых переходов", то-есть смены типов решетки (см. рис. 3), хотя детально эта смена нами не исследовалась.

5. Рассмотрим подробнее гексагональную решетку, считая для простоты, что $T \ll 1, M_3 \ll M_2$. Тогда из (13) имеем уравнение

$$M = M_2, \quad (1 + \frac{1}{2} T)T'' + \frac{1}{4} T'^2 + a\gamma T = 0, \quad (15)$$

которое можно решить лишь численно. Однако в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ оно имеет решение в виде эллиптического интеграла $E(\varphi, k)$ при $|T| \leq T_* = T_{max} = 2$

$$\tau\sqrt{a} = 2E(\varphi, k)\sqrt{2/(2-k^2)}, \quad k = \sqrt{2T_*/(2+T_*)}, \quad \varphi = \arcsin\sqrt{(T_* - T)/2T_*}, \quad (16)$$

и условие "полусинхронизма" с колебаниями дна определяет параметр

$$a = 8\pi^{-2}E^2(k)/(2-k^2) \text{ при } 8\pi^{-2} = a_{min} < a < a_{max} = 1 \quad (17)$$

как функцию максимальной амплитуды T_{max} , которая, тем самым, оказывается не зависящей от ϵ при $\epsilon \ll 1$, хотя в действительности, в конечном счете, определяется именно величиной ϵ . Для квадратной и одномерной решеток также можно получить в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ условие "полусинхронизма", сходное с (17), на чем мы не будем останавливаться.

Опыт подтверждает эти выводы теории, и на практике приближенно выполняется эмпирическое соотношение $H_1^{max} = \lambda/3$, куда не входит амплитуда колебаний дна H^{-1} .

Для вывода "закона" $H_1^{max} \approx \lambda/3$ из теории следовало бы найти точное решение для (13), однако, "закон" $H_1^{max} \approx \lambda/3$ указывает также, что безразмерная амплитуда $h^{max} = kH_1^{max} = 2$ никогда не бывает малой и по ней, строго говоря, нельзя разлагать решение в ряд, хотя это и проделано нами выше. Поэтому уравнения (13) следует рассматривать лишь как "качественные". Заметим, что более строго разложение по степеням h проделано в ¹⁰.

Факт отсутствия малых амплитуд ряби в "колеблющемся поле тяжести" кардинально отличает наш случай от случая стационарных структур ⁵⁻⁹, где малые амплитуды возможны при малой надкритичности полей.

В заключение укажем, что конечность глубины Z слоя можно учесть в наших уравнениях заменой $g \rightarrow g \operatorname{th} kZ$, приводящей к зависимости экспериментальных результатов от глубины слоя (см. рис. 3).

Распад описанной волновой структуры может приводить к формированию гравитационных волн, поэтому эволюцию моретрясений следует рассматривать как один из возможных механизмов образования волн цунами.

Авторы выражают признательность М.И.Рабиновичу за ценное замечание.

Литература

1. Александров В.Е., Басов Б.И., Левин Б.В., Соловьев С.Л. "О формировании диссипативных структур при моретрясениях", ДАН, 1986, 289, 1144.
2. Faraday M. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1831, 121, 299.
3. Езерский А.Б., Коротин П.И., Рабинович М.И. Письма в ЖЭТФ, 1985, 41, 129.
4. Соловьев С.Л., Го Ч.Н. Каталог цунами на западном побережье Тихого океана, М., Наука, 1974.
5. Melcher J.R. Field-coupled Surface Waves, Cambridge, Mass., The M.I.T., Press, 1963.
6. Taylor G.I., McEwan A.D. J. Fluid Mech., 1965, 22, 1.
7. Шикин В.Б. ЖЭТФ, 1984, 78, 521.
8. Cowley M.D., Rosensweig R.E. J. Fluid Mech., 1967, 30, 671.
9. Кузнецов Е.А., Спектор М.Д. ЖЭТФ, 1976, 71, 262.
10. Захаров В.Е. ПМТФ, 1968, 2, 89.
11. Справочник по спец. функциям, под ред. Абрамович М. и Стиган И. (пер. с англ.). М.: Наука, 1979.
12. Таблицы физических величин, спр. под ред. Кикоина И.К., М., Атомиздат, 1976.

Поступила в редакцию
8 июля 1986 г.