Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 7, стр. 319 – 321 *10 октября 1986 г.*

О МГД-УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КВАЗИЖЕЛОБКОВЫХ МОД В ЗАМКНУТЫХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ

В.И.Ильгисонис, В.П.Пастухов

Проведена аналитическая минимизация функционала потенциальной энергии МГД-возмущений в плазме конечного давления. Показано, что в замкнутых системах могут развиваться нелокальные квазижелобковые моды, которые оказываются более опасными, чем локализованные возмущения. В качестве примера получен необходимый и достаточный критерий МГД-устойчивости для ловушек типа ДРАКОН, являющийся достаточным для произвольных бестоковых параксиальных систем с круглыми магнитными поверхностями.

1. Одним из наиболее распространенных методов анализа устойчивости плазмы является энергетический принцип [1], согласно которому необходимым и достаточным условием МГД-устойчивости плазмы с давлением p и показателем адиабаты γ в магнитном поле $\mathbf{B}$ относительно произвольных малых смещений $\vec{\xi}$ является положительная определенность функционала энергии [2]:

$$W = \frac{1}{2}\int dV\,\{\mathbf{T} + (\vec{\xi}\mathbf{n})\Lambda\mathbf{n})^2 + (\vec{\xi}\mathbf{n})^2\,[\mathbf{B}\vec{\nabla}\Lambda - 2\Lambda\mathbf{n}\,\mathbf{rot}\,[\mathbf{nB}] - \Lambda^2 - K] + \gamma p\,\mathrm{div}^2\,\vec{\xi}\}\,. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{T} = \mathbf{Q} + (\vec{\xi}\mathbf{n})\,[\mathbf{rot}\,\mathbf{B}\,\mathbf{n}]$, $\mathbf{Q}$ – возмущенное магнитное поле (в плазме $\mathbf{Q} = \mathbf{rot}\,[\vec{\xi}\mathbf{B}]$); $K = 2\,[\mathbf{rot}\,\mathbf{B}\,\mathbf{n}]\,(\mathbf{B}\vec{\nabla})\,\mathbf{n}$, $\mathbf{n} = -\vec{\nabla}p/|\vec{\nabla}p|$ – орт к магнитной поверхности; Λ – произвольная однозначная функция (вводится для удобства в случае замкнутых систем с магнитными поверхностями; сумма всех членов с Λ в (1) равна нулю). Обычно для определения наиболее опасных возмущений W минимизируется по $\vec{\xi}$, однако в общем случае (без дополнительных предположений) такая непосредственная минимизация приводит к весьма сложным уравнениям и не позволяет получить универсальный необходимый и достаточный критерий МГД-устойчивости.

Мы будем исследовать устойчивость плазмы невысокого давления ($\beta \sim p/B^2 \ll 1$) в замкнутых бестоковых системах. В этом случае наиболее опасными являются вытянутые вдоль силовых линий магнитного поля (квазижелобковые) несжимаемые возмущения. Естественно, что любое реальное возмущение должно быть однозначной функцией в пространстве (соответственно, периодической функцией тороидальных координат), что, вообще говоря, плохо согласуется с требованием желобковости. Противоречие заведомо отсутствует лишь в случае замкнутых силовых линий, из чего обычно делается вывод о локализации наиболее опасных возмущений вблизи рациональных магнитных поверхностей. Такое предположение (и его следствия) довольно сильно ограничивают характер поперечной (по отношению к магнитному полю) зависимости рассматриваемых возмущений и позволяют получить, как правило, лишь необходимый критерий МГД-устойчивости [3,4].

2. С нашей точки зрения класс рассматриваемых возмущений может быть значительно расширен. Дело в том, что длина L, на которой происходит замыкание возмущения в соответствии с требованием периодичности, может значительно превышать характерный размер l изменения магнитного поля, как, например, в системах типа ДРАКОН [5], винтовой тор и др. Нетрудно видеть, что при не слишком малых $\beta > (l/L)^2$ возмущение магнитного поля, навязанное требованием периодичности, может быть сравнительно невелико (по отношению к члену с K в (1)) и для нелокальных возмущений. Таким образом, на данном этапе минимизации оказывается возможным не вводить дополнительных предположений о характере поперечной зависимости $\vec{\xi}$, что позволяет рассчитывать на получение необходимого и достаточного критерия МГД-устойчивости. Вывод такого критерия обсуждается в данной статье.

3. Опишем формализм процесса минимизации W. Используется параксиальное приближение (все величины разлагаются в ряд по степеням $\lambda \sim a/l \ll 1$: $X \approx X_0 + \lambda X_1 + \lambda^2 X_2 + \ldots$, a – характерный поперечный размер плазмы). При наличии магнитных поверхностей (а мы будем рассматривать только такие системы) продольная компонента $\vec{\xi}$ входит лишь в последнее слагаемое в W [6], которое достигает минимума на несжимаемых возмущениях. Продольная компонента $\mathbf{T}$: $\mathbf{TB}/B \sim BX/a$ (где $X \sim |\vec{\xi}|$) – самый старший член в подынтегральном выражении, поэтому на каждом этапе минимизации он минимизируется независимо за счет смещений высших порядков, в результате чего должно быть $\mathbf{TB}/B \approx 0$ с точностью до членов $\sim XB\lambda^3/a$. Это обеспечивается выбором $\vec{\xi}$ в виде:

$$\vec{\xi} = \frac{1}{B^2}\,\mathrm{rot}\,(BF\mathbf{B}) - \frac{\mathbf{B}}{B^3}\,F(\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}) - 2F\,\frac{(\mathbf{n}\vec{\nabla}p)}{B^3}\,[\mathbf{Bn}], \qquad (2)$$

где $F \sim Xa$ – произвольная функция (считаем $p/B^2 \sim \lambda^2$).

Подстановка (2) позволяет минимизировать W по единственной функции F и, следовательно, получать посредством численных расчетов точный критерий устойчивости для произвольной заданной системы. Однако аналитический вывод критерия в общем виде затруднен, поскольку соответствующая эйлеровская экстремаль описывается довольно сложным уравнением четвертого порядка в частных производных. В связи с этим мы продолжим процедуру последовательной минимизации W в параксиальном приближении. Данная процедура требует зануления членов старшего порядка ($XB\lambda/a$) в поперечных компонентах $\mathbf{T}$, однако это приводит к не представляющим интереса тривиальным возмущениям с $(\vec{\xi}_0\mathbf{n}) = B^{-2}\,[\mathbf{Bn}]\vec{\nabla}(F_0 B) \approx$ ≈ 0 (нетривиальными могут быть, например, возмущения, локализованные вблизи рациональных магнитных поверхностей). Тем не менее при $l/L \lesssim \lambda$ и $f = B^{-2}\mathbf{B}\vec{\nabla}(FB) \sim \lambda X(l/L\ldots +$ $+ \lambda \ldots + \ldots)$ несмотря на то, что возмущение поперечного магнитного поля в старшем порядке формально отлично от нуля, соответствующий член в подынтегральном выражении может быть достаточно мал (следующего порядка по λ и даже меньше) из-за появления нового независящего от λ параметра l/L, так что логика разложения по степеням λ не нарушается. Функционал (1) в плазменной области принимает вид:

$$W_{pl} \approx \frac{1}{2}\int B^2 dV\,\{(B^{-1}[\mathbf{Bn}]\vec{\nabla}f + (\vec{\xi}_0\mathbf{n})\Lambda B^{-1})^2 + (\mathbf{n}\vec{\nabla}f - (\vec{\xi}_0\mathbf{n})B^{-2}(\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}))^2 +$$
$$+ (\vec{\xi}_0\mathbf{n})^2 B^{-2}\,[\,|\vec{\nabla}p|^2\,\mathbf{B}\vec{\nabla}(\Lambda|\vec{\nabla}p|^{-2}) - \Lambda^2 - K]\}. \qquad (3)$$

Величина $\Lambda \sim B\lambda^2/a$ выбирается из условия компенсации в выражении в квадратных скобках в (3) членов $\sim B^2\lambda^3/a^2$ (такая Λ существует). В результате все члены в подынтегральном выражении в (3) оказываются одного порядка ($\sim B^2\lambda^4/a^2$), в котором и должен быть получен критерий. Величина $f = B^{-2}\mathbf{B}\vec{\nabla}(B(F_0 + \lambda F_1))$ варьируется в (3) независимо от $(\vec{\xi}_0\mathbf{n})$, но с учетом условия разрешимости $\int fB^2 dV \approx 0$ (интегрирование между магнитными поверхностями).

При определении значения f на граничной магнитной поверхности (из условия трансверсальности) следует, вообще говоря, добавить к (3) интеграл по вакуумной области $W_{вас} = \int \mathbf{Q}^2 dV/2$, сшивая поля на границе плазмы.

Последний (и наиболее трудоемкий) этап минимизации – по квазижелобковой части смещения $(\vec{\xi}_0\mathbf{n})$ – проводится без предварительных ограничений на радиальную зависимость $(\vec{\xi}_0\mathbf{n})$ и может в силу этого приводить к более жесткому критерию, чем известные критерии локальной устойчивости.

4. Аналитическая минимизация W в инвариантной форме затруднена, поэтому в качестве иллюстрации приведем результат, полученный для параксиальных систем с круглым сечением магнитных поверхностей[1)] и параболическим профилем давления $p = \lambda^2 p_0(1 - \Psi/\Psi_b)$, где $\Psi \approx r^2 B_0 + \lambda \ldots$, $\Psi_b = \mathrm{const}$, r – текущий радиус магнитной поверхности, $B_0(s)$ – текущее значение магнитного поля на оси системы с кривизной $k(s)$ и кручением $\kappa(s)$:

$$\oint \frac{ds}{B_0^2}\left\{-\frac{3}{4}\left(\frac{B_0'}{B_0}\right)^2 - k^2 + k\frac{B_0'}{2B_0}(I_u\cos\alpha - I_g\sin\alpha)\right\} - \beta_1 B_0\sqrt{G_u^2 + G_g^2} > 0. \qquad (4)$$

Здесь $G_u = \oint ds(I_u^2 - I_g^2)/B_0^3$; $G_g = \oint ds(2I_u I_g)/B_0^3$; $\beta_1 = 2a^2\lambda^{-2}B_0^{-1}(\partial p/\partial\Psi) \sim 1$; $(I_u/B_0^{3/2})' = k\cos\alpha/B_0^{3/2}$; $(I_g/B_0^{3/2})' = k\sin\alpha/B_0^{3/2}$; $\alpha' = \kappa$ – штрих обозначает производную по s – вдоль оси системы. Критерий (4) является необходимым и достаточным критерием устойчивости плазмы в ловушке ДРАКОН [5] с достаточно длинной (но не бесконечной) прямой секцией, а также может рассматриваться в качестве достаточного для произвольных замкнутых бестоковых систем с пространственной осью. Последний член в подынтегральном выражении в (4) явно отличает критерий (4) от критериев Мерсье и баллонных мод.

5. Анализируемые возмущения, отвечающие критерию (4), представляют собой квазижелобковые смещения, модулированные более слабой структурой баллонного типа. По азимутальной зависимости они представляют собой широкий пакет сцепленных за счет тороидального эффекта соответственно четных или нечетных гармоник (критерий устойчивости отдельной моды совпадает с критерием Мерсье). Радиальная зависимость может быть довольно сильноосциллирующей, а область локализации по радиусу определяется широм (при слабом шире – весь шнур). Более подробный анализ структуры полученных возмущений выходит за рамки настоящей статьи.

Литература

1. *Lundquist S.* Phys. Rev., 1951, 83, 307.
2. *Lortz D., Rebhan E., Spies G.* Nucl. Fus., 1971, 11, 583.
3. *Mercier C.* Nucl. Fus. Suppl., 1962, 2, 81.
4. *Михайловский А.Б.* ЖЭТФ, 1973, 64, 536.
5. *Glagolev V.M., Kadomtsev B.B., Trubnikov B.A., Shafranov V.D.* In: Xth Europ. Conf. on Contr. Fus. and Plasma Phys., M., 1981, 1, E-8.
6. *Кадомцев Б.Б.* В сб.: Вопросы теории плазмы, вып. 2, Госатомиздат, М., 1963.
7. *Трубников Б.А., Глаголев В.М.* Физика плазмы, 1984, 10, 289.

Поступила в редакцию
28 июля 1986 г.

Институт атомной энергии им. И.В.Курчатова

[1)] Как показано в [7], такие системы могут обладать "средним $min\ B$".