

## ГЕНЕРАЦИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУР С ОСЬЮ СИММЕТРИИ ИЗ ГАМИЛЬТОНОВСКОЙ ДИНАМИКИ

*Г.М.Заславский, М.Ю.Захаров, Р.З.Сагдеев,  
Д.А.Усилов, А.А.Черников*

Приведено отображение, генерирующее упорядоченные структуры с осью симметрии произвольного порядка. Генератор порождается движением частицы в потенциале с двумя конкурирующими симметриями. Для иллюстрации приводятся покрытия плоскости с осями симметрии 5-го и 7-го порядков.

Задача о механизме стохастической динамики частиц в постоянном магнитном поле и в поле волнового пакета, распространяющегося перпендикулярно магнитному полю, приводит к новым и, на первый взгляд, неожиданным следствиям. Они имеют не только непосредственное приложение в теории ускорения Ферми, но и устанавливают аналогию с симметричными свойствами гидродинамических и плазменных структур и структурами квазикристаллов. Ниже излагаются результаты, устанавливающие эту связь.

Гамильтониан движения частицы имеет вид:

$$H = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_H^2 x^2) - e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} E_k \cos(kx - n\Delta\omega t), \quad (1)$$

где  $\omega_H$  — ларморовская частота и  $\Delta\omega$  — интервал между частотами волнового пакета. При  $E_k = \text{const} = E_0$  и  $k = k_0$  (однородный пакет) уравнения движения, порождаемые гамильтонианом (1) приводятся точно к отображению с подкручиванием на угол  $\alpha$ <sup>1</sup>:

$$\hat{M}_\alpha: \begin{cases} \bar{u} = [u + (K/\alpha) \sin v] \cos \alpha + v \sin \alpha \\ \bar{v} = -[u + (K/\alpha) \sin v] \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases} \quad (2)$$

где  $K = ek_0 E_0 T^2 / m$ ,  $\alpha = \omega_H T$ ,  $u = k_0 \dot{x} / \omega_H$ ,  $v = -k_0 x$  и шаг отображения равен  $T = 2\pi / \Delta\omega$ . В<sup>1</sup> было показано, что при резонансном условии

$$\alpha = 2\pi p / q, \quad (3)$$

где  $p$  и  $q$  — целые числа ( $p < q$ ) фазовая плоскость  $(u, v)$  покрывается стохастической паутиной при произвольно малых значениях  $K$ . Паутина образуется на месте разрушенных сепаратрис и обладает приближенной симметрией поворота на угол  $2\pi/q$ .

При этом существует "окно" вблизи центра сепаратрисной сетки, которое ограничено инвариантной кривой. В области окна имеется сложная субструктура с симметрией, отличающейся от симметрии паутины вне окна. Размер окна возрастает с уменьшением параметра  $K$ .

Используем далее безразмерное время  $\tau = t/T$ , которое должно входить в канонические уравнения движения.

Уравнение (2) и соответствующий ему гамильтониан

$$H_\alpha = \frac{1}{2} (u^2 + v^2) - (K/\alpha^2) \cos v \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - n) \quad (4)$$

обладают следующим примечательным свойством. Первый член в (4) описывает траектории на плоскости  $(u, v)$  с осью симметрии произвольного порядка. Второй член в (4) описывает траектории с трансляционной симметрией относительно сдвига  $v \rightarrow v + 2\pi s$  ( $s$  — целое число). Объединение этих двух слагаемых приводит к взаимодействию вращательной симметрии с трансляционной, которое оказывается наиболее сильным в условиях резонанса (3)<sup>1</sup>. Отображение  $\hat{M}_q$  становится при этом генератором покрытия плоскости упорядоченными структурами ("tiler mapping") с осью симметрии  $q$ -го порядка. Симметрия проявляется в структуре стохастической паутины и в расположении островков устойчивости внутри ячеек сепаратрисы. К этому следует добавить, что симметрия является тем более правильной, чем меньше  $K$ .

Примеры подобных симметричных покрытий с  $q = 3, 4$  и  $5$  приведены в<sup>1</sup>. Можно установить соответствие между структурой на фазовой плоскости  $(u, v)$ , порождаемой  $\hat{M}_5$  и покрытиями Пенроуза<sup>2</sup>. Тем самым устанавливается прямая аналогия между траекториями частицы с гамильтонианом  $H_5$  и структурой квазикристаллов, открытых в экспериментах<sup>3</sup>.

Приведем нетривиальный пример генерации покрытия с осью симметрии 7-го порядка. Стохастическая паутина, образуемая гамильтонианом  $H_7$  или эквивалентным отображением  $\hat{M}_7$  приведена на рис. 1. Она вся состоит из точек одной траектории, лежащей внутри тонкой области стохастической динамики. Эту паутину можно определенным образом "расшифровать" проведя линии через ее узловые точки так, чтобы получился некоторым образом упорядоченный паркет. В частности, можно привести пример подобного рода паркета, составленного из правильных 7-угольников и трех дополнительных элементов.

<sup>1</sup>) Далее для простоты полагаем  $p = 1$  и  $H_\alpha$  и  $\hat{M}_\alpha$  при  $\alpha = 2\pi/q$  обозначаем соответственно  $H_q$  и  $\hat{M}_q$ .

Известно, что для объяснения появления симметрии 5-го порядка в квазикристаллах были использованы соображения Ландау о разложении энергии по степеням параметра порядка.<sup>4</sup>

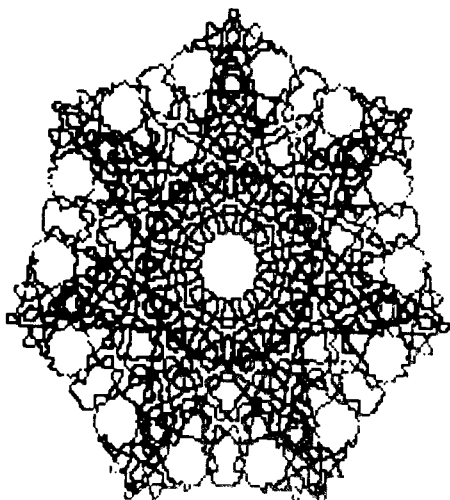


Рис. 1. Стохастическая паутина, образуемая отображением  $\hat{M}_7$  при  $K/\alpha = 0,5$ . Размер квадрата, вмещающего "звезду",  $64\pi \times 64\pi$

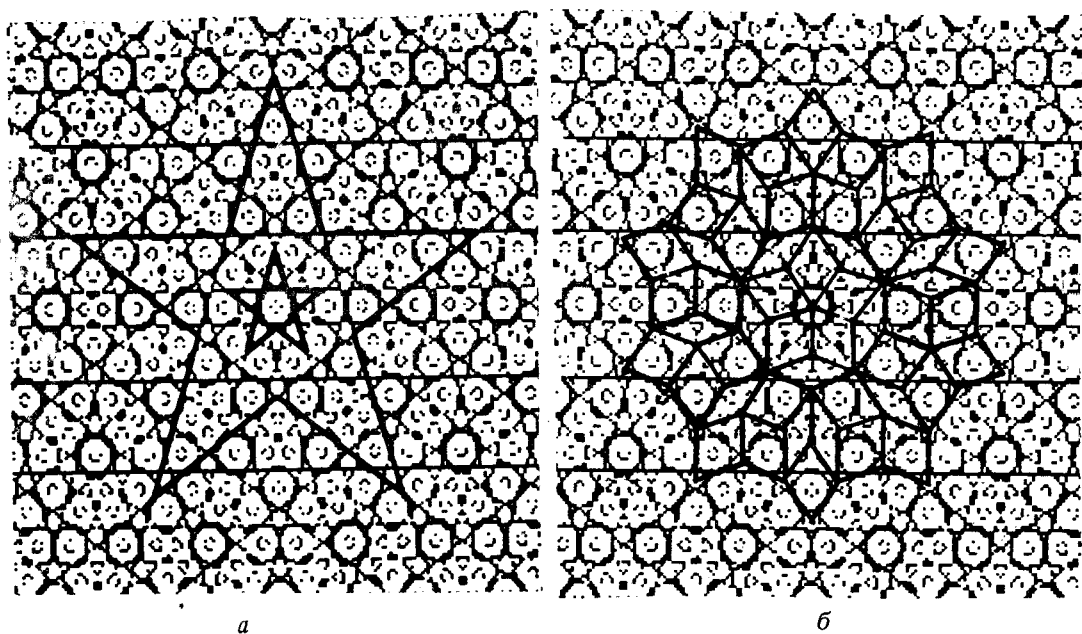


Рис. 2. Энергетический рельеф частицы  $\bar{H}_q$  в окрестности сепаратрис. Размер квадрата  $64\pi \times 64\pi$ : а) карта рельефа; б) то же с наложенным поверх рельефа покрытием Пенроуза (алгоритм определения точек, которые необходимо соединять, очевиден из рисунка)

Несколько иные идеи использовались также в работах<sup>5, 6</sup>. Однако к настоящему моменту не построена модель реальной физической системы, которая порождает структуры с симметрией 5-го порядка. В нашем случае мы имеем возможность из первых принципов (т.е. из гамильтониана  $H_\alpha$  или уравнений движения  $\hat{M}_\alpha$ ) получить такой вид гамильтониана, что его траектории покрывают фазовую плоскость паркетом с произвольной, наперед заданной симметрией поворота. Для этого достаточно в (4) произвести выделение резонансных членов при  $\alpha = 2\pi/q$ . Несложные вычисления дают (в системе координат, вращающейся с частотой  $\omega_H$ ):

$$\tilde{H}_q = \bar{H}_q + H_{int}; \quad \bar{H}_q = - \frac{K}{\alpha^2 q} \sum_{k=1}^q \cos\left(v \cos \frac{2\pi k}{q} + u \sin \frac{2\pi k}{q}\right); \quad (5)$$

$$H_{int} = -\frac{k}{\alpha^2} \sum_{n \neq kq} J_n(\sqrt{u^2 + v^2}) \cos \left\{ \frac{n}{q} \arctg \frac{v}{u} + 2\pi \left( \frac{n}{q} - k \right) \tau \right\},$$

где  $J_n$  – функция Бесселя. Случай  $\bar{H}_q$  при  $q = 3$  и  $6$  определяет ячейки Бенара при термоконвекции<sup>7</sup>. Случай  $q = 2$  соответствует конвективным валам. Случай  $q = 4$  рассмотрен в<sup>1</sup>. Выражение, получающееся из  $\bar{H}_q$  при  $q = 5$  приведено в<sup>6</sup> в качестве параметра порядка. Таким образом, формула (5) не только содержит известные структуры сплошной среды, но также возможные новые структуры с произвольным  $q$ . Кроме того, в (5) имеется вид потенциала возмущения этих структур  $H_{int}^{(2)}$ .

С помощью выражения (2) при  $\alpha = 2\pi/q$ , т.е. для "tiler mapping" устанавливается следующее:

- 1) Существует покрытие плоскости  $(u, v)$  с симметрией покрытия порядка  $q$ .
- 2) Структура покрытия приближенно задается стохастической паутиной (т.е. сепаратрисной сеткой) гамильтониана  $\bar{H}_q$ .
- 3) Возмущение  $H_{int}$  одевает сетку покрытия стохастическим слоем  $\sim \exp(-\text{const}/K)$ .
- 4) Генератор покрытия плоскости (2) обобщается на трехмерный случай путем введения соответствующих эйлеровых углов.
- 5) Структура покрытия может быть приближенно получена путем  $q$ -кратного поворота бесконечной системы параллельных линий конечной (!) толщины.

На рис. 2 и 3 приводятся карты энергетических рельефов частицы, в которых заштрихованная область соответствует энергии  $E$  частицы, траектория которой проходит вблизи сепаратрис. Эти рельефы указывают на область "протекания" частицы по каналам стохастической паутины и соответствуют симметриям 5-го и 7-го порядков. На рис. 2, б на рельеф областей протекания наложено покрытие Пенроуза.

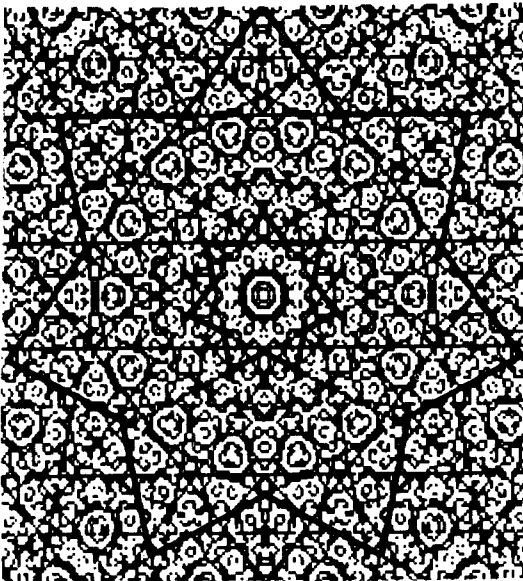


Рис. 3. Карта энергетического рельефа частицы  $\bar{H}_q$  в окрестности сепаратрис. Размер квадрата  $80\pi \times 80\pi$ .

Из рис. 2 и 3 видно, что симметрия покрытия обладает фрактальным свойством в сторону увеличения элементов покрытия. При этом генерируются подобные фигуры увеличивающихся размеров (см. выделенные 5-угольники и 7-угольники на рис. 2, а, 3).

Таким образом "tiler mapping"  $\bar{M}_q$  реализует связь между покрытием плоскости с осью симметрии произвольного порядка  $q$  и эквивалентной динамической системой (4) с  $\alpha = 2\pi/q$ ,

2) Заметим, что полный гамильтониан  $\bar{H}_q$  имеет приближенную симметрию поворота  $2\pi/q$ . В то же время усредненная его часть  $\bar{H}_q$  состоит из двух одинаковых и наложенных друг на друга покрытий с симметрией  $q$ -го порядка. Поэтому результирующее покрытие для  $\bar{H}_q$  симметрично относительно поворота на  $\pi/q$  при нечетном  $q$ .

в которой особые траектории частицы внутри каналов стохастической паутины осуществляют нужное покрытие.

В заключение искренне благодарим В.И.Арнольда за интересное обсуждение и замечания.

### Литература

1. Заславский Г.М., Захаров М.Ю., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. ЖЭТФ, 1986, 91, 500.
2. Penrose R. Bull. Inst. Math. Appl., 1974, 10, 266.
3. Shechtman D., Blech I., Gratias D., Cahn J.W. Phys. Rev. Lett., 1984, 53, 1951.
4. Калугин П.А., Китаев А.Ю., Левитов Л.С. Письма в ЖЭТФ, 1985, 41, 119.
5. Levine D., Steinhardt P. J. Phys. Rev. Lett., 1984, 53, 2477.
6. Vak P. Phys. Rev. B., 1985, 32, 5764.
7. Горьков Л.П. ЖЭТФ, 1957, 33, 402.

Институт космических исследований  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
2 июля 1986 г.