Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 8, стр. 366 – 369 *25 октября 1986 г.*

СРАВНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ ФИКСАЦИИ КАЛИБРОВКИ В ТЕОРИИ СТРУНЫ И ТЕОРИИ ЯНГА – МИЛЛСА

М.А.Соловьев

Показано, что топологические препятствия к фиксации калибровки в теории струны и теории Янга – Миллса имеют принципиально разный характер. В теории струны главное расслоение, определяемое действием группы диффеоморфизмов, редуцируемо к компактной или дискретной группе, а в неабелевой теории поля аналогичная редукция невозможна.

Цель данной статьи – сопоставить топологические аспекты задания калибровки в теории струны Полякова [1] и в неабелевой теории поля. И в том, и в другом случае глобальная калибровка невозможна, однако в теории струны глобально существует неполная калибровка с остаточной симметрией, сводящейся к действию компактной или дискретной группы, или их камбинации. Мы покажем, что в неабелевой теории поля аналогичная калибровка топологически запрещена. Это усиливает результат Зингера [2] о грибовских неоднозначностях [3].

Как известно, действие

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_S d^2\xi \sqrt{g} g^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x_\mu \tag{1}$$

(ξ -- координаты мировой поверхности S-струны, g — метрика на ней, $x^\mu(\xi)$ — вложение S в d-мерное пространство-время) инвариантно относительно группы $D(S)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов и относительно группы Вейля $g \to \lambda g$, $\lambda(\xi) > 0$, обозначаемой далее $W(S)$. Подобно тому, как в теории Янга – Миллса действие группы калибровочных преобразований G (по модулю центра) определяет структуру главного расслоения на пространстве неприводимых калибровочных потенциалов $\widetilde{P}$, действие D определяет такую структуру на пространстве $\widetilde{M}$ метрик с тривиальными изометриями. Это расслоение также не имеет глобального сечения, ибо иначе соблюдалось бы равенство

$$\pi_i(\widetilde{M}) = \pi_i(D) \times \pi_i(\widetilde{M}/D), \tag{2}$$

что невозможно, поскольку $\widetilde{M}$, как и $\widetilde{P}$, имеет нулевые гомотопические группы, а D гомотопически нетривиальна, как и G. Аналогия с теорией Янга – Миллса проводилась в [4], мы же рассмотрим различия, связанные с тем, что расслоение $\widetilde{M}/D$ допускает очень сильную редукцию. Этот факт вытекает из результатов [5], установленных в теории пространств Тейхмюллера [6], широко используемой сейчас при исследовании многопетлевых амплитуд [7-12]. В случае сферы S^2 группа $D(S^2)$ как топологическое пространство представима в виде

$$D(S^2) = H \times D(S^2; x_1, x_2, x_3), \tag{3}$$

где $H = SL(2, \mathbf{C})/\mathbf{Z}_2$ — группа голоморфных автоморфизмов, а $D(S^2; x_1, x_2, x_3)$ — подгруппа, оставляющая на месте три различные точки сферы. Эта подгруппа действует свободно как на пространстве метрик M, так и на пространстве комплексных структур $C = M/W$, которые оба стягиваемы. Сводя задачу к уравнению Бельтрами, легко показать, что ее действие на $C(S^2)$ транзитивно [5]. Для расслоения $M/D(S^2; x_1, x_2, x_3)$ это означает, что поверхность Σ метрик, конформных стандартной, служит его глобальным сечением (непрерывность которого следует из непрерывной зависимости решения уравнения Бельтрами от коэффициентов), а для $\widetilde{M}/D$ пересечение $\Sigma \cap \widetilde{M}$ определяет редукцию к H. Поскольку H содержит $SO(3)$ как максимальную компактную подгруппу, возможна и дальнейшая редукция к $SO(3)$. В случае тора T^2 аналогичное представление имеется для компоненты единицы

$$D_0(T^2) = H_0 \times D_0(T^2, x_0). \tag{4}$$

Подгруппа $D_0(T^2, x_0)$ снова действует свободно, и нетрудно построить явное сечение для ее действия в M и C. Именно, если рассматривать T^2 как факторпространство комплексной плоскости $\mathbf{C}$ по целочисленной решетке, то для любой метрики существует единственное преобразование из $D_0(T^2, x_0)$, приводящее ее к виду

$$\lambda(\xi)\, |d\xi_1 + \tau d\xi_2|^2, \ \tau \in \mathbf{C}^+ \tag{5}$$

(λ — двоякопериодическая функция на $\mathbf{C}$). Иначе говоря, пространство орбит для действия $D_0(T^2, x_0)$ на $C(T^2)$ можно отождествить с верхней полуплоскостью $\mathbf{C}^+$. Отсюда следует тривиальность этого расслоения, стягиваемость $D_0(T^2, x_0)$ и гомотопическая эквивалентность $D_0(T^2)$ группе $H_0 = SO(2) \times SO(2)$ [5]. Действие группы D/D_0 на C/D_0 при этом отождествлении переходит в стандартное действие модулярной группы Клейна $SL(2, \mathbf{Z})$ на $\mathbf{C}^+$, и для расслоения $\widetilde{M}/D$ поверхность метрик вида [5] определяет редукцию к полупрямому произведению компактной группы H_0 и дискретной $SL(2, \mathbf{Z})$. В случае поверхности рода $p > 1$ анализ расслоения во многом похож на случай тора и исходит из реализации S_p как факторпространства $\mathbf{C}^+$ по действию соответствующей фуксовой группы. Здесь уже сама компонента единицы D_0 действует на M и C свободно. Пространство Тейхмюллера $T = C/D_0$ гомеоморфно $\mathbf{R}^{6p-6}$, откуда вытекает тривиальность расслоения $C \to C/D_0$ и стягиваемость $D_0(S_p)$. На соответствующем сечении определено действие модулярной группы Тейхмюллера D/D_0, которая дискретна и действует собственно разрывно [5,6].

Итак, группа D_0 всегда стягиваема к компактной подгруппе (при $p > 1$ даже к единице), что и обеспечивает редуцируемость $\widetilde{M}/D$. Покажем, что в неабелевой теории поля ситуация иная, и компонента единицы группы $\widetilde{G}$ (факторгруппы G по центру) не имеет гомотопического типа компактной группы Ли. Это будет означать невозможность неполной глобальной калибровки, приводящей к орбитам *конечного объема* в континуальном интеграле. Мы ограничимся рассмотренным в [2] случаем калибровочной группы $SU(N)$ и одноточечной компактификации пространства – времени S^4. Относительно функционального класса, которому должны принадлежать поля, см. [13]. Обозначим через $G(x_0)$ подгруппу калибровочных преобразований, равных единице в точке x_0. Она нормальна в G, и

$$G/G(x_0) = SU(N). \tag{6}$$

Для ее гомотопических групп справедлива формула [2]

$$\pi_i G(x_0) = \pi_{i+4} SU(N). \tag{7}$$

Предположим, что $\widetilde{G}_0$ имеет гомотопический тип компактной группы H. Тогда

$$\pi_i G = \pi_i H \ \text{ при } \ i > 1. \tag{8}$$

Подставляя (7), (8) в точную гомотопическую последовательность расслоения (6), получаем

$$\ldots \to \pi_{i+1} SU(N) \to \pi_{i+4} SU(N) \to \pi_i H \to \pi_i SU(N) \to \ldots \tag{9}$$

Пусть $N = 2$. Из гомотопических групп $SU(2)$ лишь третья содержит бесконечную циклическую группу $\mathbf{Z}$. Из (9) следует, что и H должна обладать этим свойством, т.е. имеет лишь одну простую компоненту, локально изоморфную $SU(2)$. Но тогда возникает противоречие в (9) при $i = 6$, поскольку $SU(2) \approx S^3$, $\pi_7 S^3 = \mathbf{Z}_2$, $\pi_{10} S^3 = \mathbf{Z}_{15}$, $\pi_6 S^3 = \mathbf{Z}_{12}$. В случае $SU(3)$ простой компонентой H могла бы быть лишь $SU(3)$, но это снова приводит к противоречию при $i = 6$. В случае $SU(4)$ из (9) вытекает, что $\pi_3 H$ содержит $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$, а $\pi_{5,7} H$ содержат $\mathbf{Z}$. Значит, H имеет две простые компоненты, и надо рассмотреть два варианта: $SU(4) \times SU(2)$ и $SU(3) \times \times Spin(5)$. Оба приводят к противоречию при $i = 8$. При последующих N также сначала определяем бесконечные части гомотопических групп $\pi_i H$, диктуемые (9). Это позволяет найти простые компоненты, которые могли бы входить в H, поскольку для всех простых компактных групп Ли бесконечные части гомотопических групп известны. Оказывается, при любом $N \geqslant 5$ единственным возможным кандидатом служит $SU(N) \times SU(N-2)$. Однако тогда возникает противоречие в (9) при $i = 2N$, которое устанавливается с помощью данных [14] о нестабильных гомотопических группах

$$\pi_{2N} SU(N) = \mathbf{Z}_{N!},\ \pi_{2N+1} SU(N) = \begin{cases} 0 \\ \mathbf{Z}_2 \end{cases},\ \pi_{2N+2} SU(N) = \begin{cases} \mathbf{Z}_{(N+1)!/2} & \text{при четных } N \\ \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_{(N+1)!} & \text{при нечетных } N \end{cases}$$

Пусть, например, N нечетно. Гомотопическая последовательность расслоения $SU(N+1)/SU(N) = S^{2N+1}$ дает

$$0 \to \pi_{2N+4} SU(N) \to \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_{(N+2)!} \to \mathbf{Z}_{24}. \tag{10}$$

Значит, в $\pi_{2N+4} SU(N)$ есть элемент порядка $\geqslant (N+2)!/24$, а порядок любого элемента $\pi_{2N}(SU(N) \times SU(N-2))$ не превосходит $N!$. Тем самым мономорфизм $\pi_{2N+4} SU(N) \to \pi_{2N} H$ невозможен.

Эта работа является результатом обсуждений с В.Я.Файнбергом. Автор благодарен также М.И.Монастырскому за полезные замечания.

Литература

1. *Polyakov A.M.* Phys. Lett., 1981, 103B, 207.
2. *Singer I.M.* Comm. Math. Phys., 1978, 60, 1.
3. *Gribov V.N.* Nucl. Phys., 1978, B139, 1.
4. *Killingback T.P.* Comm. Math. Phys., 1985, 100, 267.
5. *Earle C.J., Eells J.* J. Diff. Geom., 1969, 3, 19.
6. *Абикоф У.* Вещественно аналитическая теория пространства Тейхмюллера, М.: Мир, 1985.
7. *Belavin A., Knizhnik V.G.* Phys. Lett., 1986, 168B, 201.
8. *Баранов М.А., Шварц А.С.* Письма в ЖЭТФ, 1986, 42, 340.
9. *Манин Ю.И.* Письма в ЖЭТФ, 1986, 43, 161.
10. *Белавин А.А., Книжник В.Г., Морозов А.Ю., Переломов А.М.* Письма в ЖЭТФ, 1986, 43, 319.
11. *D'Hoker E., Phong D.H.* Nucl. Phys., 1986, B269, 205.
12. *Polchinski J.* Comm. Math. Phys., 1986, 104, 37.
13. *Соловьев М.А.* Письма в ЖЭТФ, 1983, 38, 415.
14. *Kervaire M.A.* Illinois J. Math., 1960, 4, 161.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 сентября 1986 г.