Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 8, стр. 388 – 390 *25 октября 1986 г.*

АНАЛОГ ГРАВИТАЦИИ В СВЕРХТЕКУЧЕМ ^{3}He-*A*

Г.Е.Воловик

Установлено соответствие между коллективными бозонными модами в ^{3}He-*A* и гравитационными волнами в общей теории относительности. Найден вклад этих мод в киральную аномалию.

Особенности в поведении сверхтекучего ^{3}He-*A* при низких температурах имеют то же происхождение, что аномалии и поляризация вакуума в физике частиц, поскольку теория поля, описывающая взаимодействие киральных фермионов с коллективными бозонными полями колебаний параметра порядка $A_{\alpha i}$, имеет много общего с теорией электрослабого взаимодействия [1]. Роль фотонов и *W*-бозонов в ^{3}He-*A* играют орбитальные и спин-орбитальные волны (см. таблицу). Здесь мы рассмотрим взаимодействие фермионных квазичастиц с остальными 12 модами параметра порядка, которые играют роль гравитационных полей. Эти поля приводят к дополнительной кирально-гравитационной аномалии, обеспечивающей передачу импульса из сверхтекучего вакуума в систему квазичастиц.

Мода	Вырождение	Осциллирующие переменные	Переменные в теории поля	Аналог в физике частиц	Q
Орбитальные волны	2	1	$A; g^{13}, g^{23}$	фотоны	± 1
Спин-орбитальные волны	4	$e_{\alpha\beta\gamma} d_\beta l_i \delta A_{\gamma i}$	W_α	*W*-бозоны	± 1
Clapping-моды	2 (6)	$(\delta\vec{\Psi}, \vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2)$	g^{12}, $\frac{1}{2}(g^{11} - g^{22})$	гравигоны	± 2
Псевдозвук	1 (3)	$\mathrm{Re}(\delta\vec{\Psi}, \vec{\Delta}_1 - i\vec{\Delta}_2)$	$\frac{1}{2}(g^{11} + g^{22})$	дополнительный гравитон	0
Звук (+ спиновые волны)	1 (3)	$\mathrm{Im}(\delta\vec{\Psi}, \vec{\Delta}_1 - i\vec{\Delta}_2)$	—	волна кручения	0

Соответствие между 18 коллективными модами в ^{3}He-*A* и бозонами в теории частиц. Q – квантовое число для бозонов в ^{3}He-*A* [*], играет роль проекции спина частицы на волновой вектор **q**, выбранный вдоль **l**. Указано только 10 мод: остальные 8 мод параметра порядка соответствуют обобщению гравитации на случай зависящих от спина (в физике частиц – изоспина) тетрад $e^i_a \to e^{i\alpha}_a$, в результате чего число мод, связанных с гравитацией, утраивается (см. цифру в скобках во второй колонке, которая указывает вырождение в приближении слабой связи с учетом дополнительных 8 мод).

Чтобы понять происхождение гравитационных степеней свободы, рассмотрим спектр фермионов в поле неравновесного параметра порядка, который мы для простоты возьмем с фиксированной спиновой структурой:

$$A^i_\alpha = d_\alpha \Psi^i . \qquad (1)$$

Здесь **d** – единичный вектор магнитной анизотропии в ^{3}He-*A*, а $\vec{\Psi}$ – произвольный комплексный вектор, который в равновесии приобретает обычный для ΦA-фазы вид

$$\vec{\Psi}^{eg} = \Delta_0(\vec{\Delta}_1 + i\vec{\Delta}_2), \quad |\vec{\Delta}_1|^2 = |\vec{\Delta}_2|^2, \quad \vec{\Delta}_1 \cdot \vec{\Delta}_2 = 0, \tag{2}$$

где Δ_0 — равновесная амплитуда щели в спектре возбуждений.

Фермионный спектр в присутствии такого параметра порядка имеет вид $E^2 = v_F^2(k - k_F)^2 + |\mathbf{k} \cdot \vec{\Psi}|^2/k_F^2$ и обращается в нуль в двух точках на ферми-поверхности $\mathbf{k} = \pm k_F \mathbf{l}$, где $\mathbf{l} = i[\vec{\Psi}, \vec{\Psi}^*]/|[\vec{\Psi}, \vec{\Psi}^*]|$. Разлагая E^2 вблизи этих точек, получаем спектр заряженных безмассовых частиц в электромагнитном и гравитационном полях

$$E^2 = g^{ij}(k_i - eA_i)(k_j - eA_j), \tag{3}$$

где $\mathbf{A} = k_F \mathbf{l}$, $e = \pm 1$, а метрический тензор $g^{\mu\nu}$ выражается через тетрады e_a^μ ($a = 0, 1, 2, 3$; $\mu = (0, i)$)

$$g^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab}, \quad \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -\eta^{00} = 1, \tag{4}$$

$$e_1^i + ie_2^i = \Psi^i/k_F, \quad e_3^i = v_F l^i, \quad e_0^0 = 1, \quad e_a^0 = e_0^i = 0 \quad (a \neq 0).$$

Уравнения Вейля для этих фермионов можно получить "извлечением квадратного корня" из (3). Однако непосредственный вывод этих уравнений из уравнения Боголюбова (см. [2]) показывает, что нужно правильно учитывать киральность фермионов вблизи каждого из полюсов $\mathbf{k} = ek_F\mathbf{l}$. В результате для левых отрицательно заряженных ($e = -1$) и правых положительно заряженных ($e = +1$) частиц имеем уравнения

$$\left\{ i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{2}\tau^a \left(e_a^j \left(\frac{1}{i}\partial_j - eA_j \right) + \left(\frac{1}{i}\partial_j - eA_j \right) e_a^j \right) \right\} \psi = 0, \tag{5}$$

где $\tau^a = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$ — матрицы Паули.

Эти уравнения можно записать в ковариантном виде

$$e_a^\alpha \gamma^a \nabla_\alpha \psi = 0, \tag{6}$$

вводя связность $\omega_{\alpha, ab}$, выраженные через $g^{\mu\nu}$ символы Кристоффеля Γ, кручение $A_{\gamma, \mu\nu}$, модифицированное за счет кручения калибровочное поле $\widetilde{A}_\alpha$ и длинную производную ∇_α (см. например, [4]):

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha, ab} &= e_a^\nu (\partial_\alpha e_{\nu b} - \Gamma^\gamma_{\alpha\nu} e_{\gamma b}); \\ A_{\gamma, \mu\nu} &= e_\gamma^a (\partial_\mu e_{\nu a} - \partial_\nu e_{\mu a}); \\ \widetilde{A}_\alpha &= A_\alpha + \frac{1}{8} g_{\alpha\beta} E^{\beta\gamma\mu\nu} A_{\gamma, \mu\nu}, \quad E^{\beta\gamma\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{\beta\gamma\mu\nu}; \\ \nabla_\alpha &= \partial_\alpha + \frac{1}{8}\omega_{\alpha, ab}[\gamma^a, \gamma^b] - ie\widetilde{A}_\alpha, \quad \gamma^a = (e\tau^0, \tau^1, \tau^2, \tau^3). \end{aligned} \tag{7}$$

Введенные электромагнитные и гравитационные переменные выражаются через 6 компонент вектора $\vec{\Psi}$ (см. таблицу). Из них две компоненты соответствуют колебаниям вектора $\mathbf{l}$, т.е. фотонам [1], а остальные 4 связаны с гравитацией: 3 соответствуют колебаниям метрики и одна — колебанию тензора кручения (это звук, в котором колеблется фаза конденсата, а следовательно и угол поворота вокруг $\mathbf{l}$). Лагранжиан, описывающий эти 4 моды η_n, которые мы для простоты выберем распространяющимися вдоль $\mathbf{l}$, имеет вид [3]:

$$L_G = \frac{N_F}{32} \left\{ \sum_{n=1}^{4} \left[\frac{1}{3} v_F^2 (\partial_3 \eta_n)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t} \eta_n \right)^2 \right] + \frac{4}{3} \Delta_0^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 + 2\eta_3^2) \right\}, \tag{8}$$

где $\eta_1 = \dfrac{\delta g^{11} - \delta g^{22}}{2g^{(0)11}}$, $\eta_2 = \dfrac{\delta g^{12}}{g^{(0)11}}$, $\eta_3 = \dfrac{\delta g^{11} + \delta g^{22}}{2g^{(0)11}}$, а η_4 соответствует безмассовой звуковой волне.

Clapping – моды, в которых колеблются η_1 и η_2, соответствуют гравитонам в общей теории относительности (см. [5]) с проекцией спина $Q = \pm 2$. Появление еще одного гравитона, η_3, с $Q = 0$ следствие нековариантности ^{3}He-A вдали от полюсов. Все гравитоны массивны. Интересно, что массивный 3-ий член в (8) можно рассматривать, как космологический член, если его модифицировать так, как в работе [6]:

$$L_{\text{косм}} = \Lambda\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\, g^{(0)}_{\mu\nu} g^{\mu\nu} - 1\right) \cong \Lambda\sqrt{-g^{(0)}}\left\{1 + \frac{1}{2}\,(\eta_1^2 + \eta_2^2 + 2\eta_3^2)\right\}, \tag{9}$$

где $\Lambda = \Delta_0^4/12\pi^2$, а $g^{(0)\mu\nu}$ – равновесный метрический тензор, соответствующий пространству Минковского: $g^{(0)00} = -1$, $g^{(0)ij} = c_\parallel^2 l^i l^j + c_\perp^2(\delta^{ij} - l^i l^j)$, $c_\parallel = v_F$, $c_\perp = \Delta_0/k_F$. Причем при выводе 2-го равенства в (9) наложено условие $l_i \delta g^{ij} = 0$, с тем чтобы исключить нефизическую переменную δg^{33} и те переменные, δg^{13} и δg^{23}, которые соответствуют колебаниям вектора $\mathbf{l}$, уже учтенным в "электромагнитных" волнах. Поскольку мы рассматриваем волны с волновым вектором $\mathbf{q} \parallel \mathbf{l}$, это условие эквивалентно условию $\partial_\mu g^{\mu\nu} = 0$.

Взаимодействие электромагнитного и гравитационного полей с безмассовыми фермионами, описываемое уравнением (6), должно приводить к аномалии в киральном токе [7], в которую дают вклад не только "электромагнитное" поле $\mathbf{A} = k_F \mathbf{l}$, но и "гравитация", т.е. риманова кривизна R и кручение, входящее в эффективное поле $\widetilde{A}_\alpha$:

$$\partial_\mu J_5^\mu = \frac{1}{16\pi^2}\, e^{\mu\nu\sigma\tau}\left(\widetilde{F}_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\sigma\tau} + \frac{1}{24}\, R^{\alpha}_{\ \beta\mu\nu} R^{\beta}_{\ \alpha\sigma\tau}\right), \tag{10}$$

где $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \widetilde{A}_\nu - \partial_\nu \widetilde{A}_\mu$. Это приводит к дополнительному обмену импульсом между сверхтекучим вакуумом и возбуждениями (см. [1]). Отметим, что эффективное $\widetilde{A}_0$ в отличие от указанного в [1] значения $k_F \mathbf{l}\cdot\mathbf{v}_s$ равно $k_F \mathbf{l}\cdot\mathbf{v}_s + \frac{1}{4} v_F \mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}$.

Литература

1. *Воловик Г.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **43**, 428; 535; 1986, **44**, 144.
2. *Балацкий А.В., Воловик Г.Е., Конышев В.А.* ЖЭТФ, 1986, **90**, 2038.
3. *Брусов П.Н., Попов В.Н.* ЖЭТФ, 1980, 78, 234; 1980, 79, 1871.
4. *Фаддеев Л.Д.* УФН, 1982, 136, 435.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля, Москва, 1967.
6. *Логунов А.А., Лоскутов Ю.М.* ТМФ, 1986, **67**, 323.
7. *Alvarez-Gaumé L., Ginsparg P.* Ann. Phys., 1985, **161**, 423.
8. *Воловик Г.Е., Хазан М.В.* ЖЭТФ, 1983, **85**, 948.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11 сентября 1986 г.