Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 9, стр. 405 – 407 *10 ноября 1986 г.*

ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА И КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ ОДНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Н.М.Боголюбов, А.Г.Изергин, Н.Ю.Решетихин

С помощью эффектов конечного размера вычислены зависящие от непрерывных параметров критические индексы.

1. В квантовых моделях в двумерном пространстве-времени при нулевой температуре происходит фазовый переход, длинноволновая асимптотика корреляционных функций при этом степенная и описывается конформной теорией поля [1,2]. Нахождение главных членов асимптотики сводится к определению центрального заряда c в соответствующем представлении алгебры Вирассоро и к вычислению спектра аномальных размерностей Δ, $\overline{\Delta}$ операторов в этом представлении. Эффекты конечного размера [3,4] позволяют найти эти величины. В случае периодических граничных условий центральный заряд c и аномальная размерность оператора ϕ вычисляются по следующим формулам:

$$E_L^0 = LE^0 - (\pi c/6v)/L + O(1/L^2), \tag{1}$$

$$E_L^\phi - E_L^0 = 2\pi v\theta_\phi/L; \quad P_L^\phi = (2\pi s_\phi/L) \pm P_\infty^\phi. \tag{2}$$

Здесь E_L^0 – энергия основного состояния $|0\rangle$ в ящике длины L; E_L^ϕ – минимальное собственное значение гамильтониана (отвечающее собственному состоянию $|E_\phi\rangle$, для которого формфактор $\langle 0|\phi|E_\phi\rangle \neq 0$); P_L^ϕ – импульс этого состояния; v – групповая скорость на поверхности Ферми. Главный член длинноволновой асимптотики коррелятора полей ϕ, ϕ^* ($*$ – зарядовое сопряжение) в евклидовой формулировке есть

$$\langle \phi^*(z,\bar z)\phi(0,0)\rangle = A\cos\{P_\infty^\phi(z+\bar z)/2\}\,(z)^{-\Delta_\phi}(\bar z)^{-\overline{\Delta}_\phi}, \tag{3}$$

где $\Delta_\phi = (\theta_\phi + s_\phi)/2$; $\overline{\Delta}_\phi = (\theta_\phi - s_\phi)/2$; $z = x + it$; $\bar z = x - it$. Эти формулы отличаются от стандартных [3] тем, что не предполагается, что щель в спектре оператора импульса для состояний $|E_\phi\rangle$ равна нулю при $L = \infty$. Можно также вычислять c из низкотемпературной асимптотики плотности свободной энергии при $L = \infty$ [4,5]:

$$f(T) = E^0 - (\pi c/6v)T^2 + O(T^2). \tag{4}$$

Так можно найти все критические индексы. Этот подход является дополнительным к конструктивному методу, основанному на общих принципах конформной теории [2,5,6]. При $c < 1$ набор критических индексов дискретный и однозначно определяется в конструктивном подходе [5]. При $c \geqslant 1$ критические индексы могут непрерывно зависеть от параметров теории. Формулы (1) – (4) наиболее эффективны именно в этом случае.

2. Продемонстрируем, как они работают в интегрируемых моделях, на примере бозе-газа (БГ) и XXZ антиферромагнетика Гейзенберга спина 1/2. Из низкотемпературной асимптотики свободной энергии [7,8] следует, что для них $c = 1$. Соответствующие гамильтонианы за-

пишем в виде

$$H_{\text{БГ}} = \int\limits_0^L dx\,[\partial_x \psi^+ \partial_x \psi + \kappa \psi^+ \psi^+ \psi \psi - h \psi^+ \psi],\ \kappa > 0, h > 0;$$

$$H_{XXZ} = \sum_{x=1}^{L} [\sigma_x^1 \sigma_{x+1}^1 + \sigma_x^2 \sigma_{x+1}^2 + \Delta \sigma_x^3 \sigma_{x+1}^3 + h\sigma_x^3/2],\ -1 < \Delta \leqslant 1; 0 < h < 4(1-\Delta).$$

Величина h – химический потенциал для БГ и внешнее магнитное поле для магнетика. В основном состоянии в модели БГ псевдочастицы с отрицательной энергией заполняют зону Ферми; импульс Ферми $k_F = \pi N/L = \pi\rho$. При $L \to \infty$ плотность ρ остается конечной. Аналогично можно охарактеризовать основное состояние антиферромагнетика. Роль длины ящика в этом случае играет число узлов решетки; "импульс Ферми" определяется величиной магнитного поля; плотность связана с намагниченностью: $M = (1-\rho)/2$.

Для незаряженных операторов ($\phi_0 = \psi^+\psi$ для БГ и $\phi_0 = \sigma^3$ для магнетика) возбужденные состояния $|E\rangle$, для которых $\langle 0 | \phi_0 | E \rangle \neq 0$ образованы частицами ($|k_p| > k_F$) и дырками ($|k_h| < k_F$): число частиц равно числу дырок. При $L = \infty$ имеется два состояния с минимальной (нулевой) энергией: *(a)* $k_p = \pm k_F$, $k_h = \mp k_F$, $P^\infty_{\phi_0} = 0$ и *(b)* $k_p = \pm k_F$, $k_h = \pm k_F$, $P^\infty_{\phi_0} = \pm 2k_F$. Для первого состояния легко получить

$$E_L^{\phi_0, a} - E_L^0 = 2\pi v/L; \quad P_L^{\phi_0, a} = 2\pi/L. \tag{5}$$

Второе обладает минимальной энергией среди тех, которые получаются сдвигом зоны Ферми как целого ($\pm k_F \to \pm k_F + \delta$), при этом сдвиг энергии $\Delta E = Lv\delta^2$. Минимально возможное значение δ находится из уравнения Бете: $\delta = 2\pi z(\Lambda)/L$. Здесь $z(\lambda)$ – "одетый заряд", который определяется линейным интегральным уравнением (приведенным в [9]) и имеет простой физический смысл $z(\lambda) = \partial \in(\lambda)/\partial h$ ($\in(\lambda)$ – энергия элементарного возбуждения); Λ – значение аддитивного спектрального параметра λ [10] на границе зоны Ферми. С учетом этого

$$E_L^{\phi_0, b} - E_L^0 = (2\pi v/L)\, 2z^2(\Lambda); \quad P_L^{\phi_0, b} = \pm 2k_F. \tag{6}$$

Из (5), (6) получаем для одновременного коррелятора:

$$\langle \phi_0(x)\phi_0(0) \rangle \to (A/x^2) + B\cos(2k_F x)/x^{\theta_0} + \langle \phi_0(0) \rangle^2, \tag{7}$$

$$\theta_0 = 2z^2(\Lambda). \tag{8}$$

Последнее слагаемое в (7) соответствует переходам вакуум – вакуум. Выражение (8) для критического индекса воспроизводит формулу, полученную в [9]. В случае отталкивания (для БГ и при $\Delta > 0$ в магнетике) $\theta_0 > 2$, и в (7) лидирует неосциллирующее слагаемое. В случае притяжения ($\Delta < 0$) лидирует осциллирующее слагаемое ($\theta_0 < 2$).

Рассмотрим теперь коррелятор заряженных полей ($\phi_+(x) = \psi^+(x)$ или $\phi_+(x) = \sigma_x^+$). Состояние $|E\rangle$ с минимальной энергией (если $\langle E | \phi_+ | 0 \rangle \neq 0$) является основным состоянием гамильтониана в секторе с $N+1$ частицей. С учетом этого $E_L^{\phi_+} - E_L^0 = (\partial h/\partial \rho)/L$, $P_L^{\phi_+} = 0$, и получаем

$$\langle \phi_+^*(x)\phi_+(0) \rangle = c/x^{\theta_+}; \quad \theta_+ = (\partial\rho/\partial h)/2\pi v. \tag{9}$$

В интегрируемых моделях $\partial\rho/\partial h = \pi v/z^2(\Lambda)$, и $\theta_+ = 1/\theta_0$. Таким образом, удается доказать гипотезу, высказанную в [9]. Отметим, что при выводе (9) интегрируемость теории не использовалась, поэтому формула для θ_+ универсальна. Есть основание считать, что и соотношение $\theta_+ = 1/\theta_0$ также справедливо для неинтегрируемых моделей (см., например [11]).

В заключение благодарим В.Е.Корепина и Л.Д.Фаддеева за обсуждение.

Литература

1. *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов, М.: Наука, 1975.
2. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B.* Nucl. Phys., 1984, **B241**, 333.
3. *Cardy J.* University of California preprint, 1986.
4. *Blöte H.W., Cardy J.L., Nightingale M.P.* Phys. Rev. Lett., 1986, **56**, 742.

5. *Friedan D., Qiu Z., Shenker S.H.* Phys. Rev. Lett., 1984, **52**, 1575.

6. *Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А.* ЖЭТФ, 1985, 89, 380.

7. *Yang C.N., Yang C.P.* Journ. Math. Phys., 1969, **10**, 1115.

8. *Takahashi M.* Progr. Theor. Phys., 1973, **50**, 1519.

9. *Изергин А.Г., Корепин В.Е.* Письма в ЖЭТФ, 1985, **42**, 414.

10. *Faddeev L.D.* Sov. Sci. Rev., Math. Phys., 1981, **C1**, 107.

11. *Haldane F.D.M.* Phys. Rev. Lett., 1981, **47**, 1840.

Математический институт им. В.А.Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 июля 1986 г.