Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 10, стр. 447 – 450 *25 ноября 1986 г.*

ФОРМИРОВАНИЕ УЕДИНЕННЫХ ИМПУЛЬСОВ В УСИЛИВАЮЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

В.С.Григорьян

Предсказан эффект формирования короткого уединенного импульса в протяженной усиливающей среде с отрицательной дисперсией и нелинейностью показателя преломления в режиме слабого насыщения усиливающего перехода.

Введение

Как известно, исследование солитонов в диспергирующих средах с нелинейностью показателя преломления, описываемых нелинейным уравнением Шредингера (НУШ), представляет интрес как с общефизической, так и с прикладной точек зрения. Такие солитоны были предсказаны в работах [1, 2] и экспериментально обнаружены Молленауэром и др. [3] в 1980 г. Не меньший интерес представляет исследование солитоноподобных режимов распространения импульсов в усиливающих средах, в частности и тогда, когда усиление носит нелинейный характер. Как показано в [4], в случае линейного усиления амплитуда квазисолитона неограниченно растет, длительность уменьшается и энергия экспоненциально увеличивается. В подобной системе уединенные импульсы существовать не могут. Как будет показано ниже, в случае нелинейного усиления возможно формирование уединенного импульса. Исследованию подобных уединенных импульсов и посвящена настоящая работа.

Поляризацию рассматриваемой среды представим в виде

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^r + \mathcal{P}^n ,$$

где резонансная часть поляризации, связанная с усиливающими центрами $\mathcal{P}^r = \mathrm{Sp}(\hat{d}\hat{\sigma})$, $\hat{d}$ – оператор дипольного момента. Матрица плотности (в представлении взаимодействия) $\hat{\sigma}$ описывается уравнением

$$\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial t} + \hat{\Gamma}\hat{\sigma} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{V}\hat{\sigma}] , \tag{1}$$

где $\hat{\Gamma}$ – релаксационный оператор, $\hat{V} = -\hat{d}E$ – гамильтониан взаимодействия атома с полем E. Предполагаем, что населенности резонансных уровней под действием поля E изменяются слабо. В этом случае из (1), используя вид релаксационного оператора $\hat{\Gamma}$, приведенный в [5], по теории возмущений нетрудно найти решение $\hat{\sigma}$, а значит и $\mathcal{P}^r$, в котором мы учитываем нелинейность лишь низшего порядка. Нерезонансная часть поляризации $\mathcal{P}^n$ учитывает нелинейность показателя преломления матрицы и линейные потери в среде. Подставляя $\mathcal{P}$ в уравнение Максвелла, с учетом дисперсии низшего порядка окончательно получим

$$i\frac{\partial q}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 q}{\partial \bar{t}^2} + 2q|q|^2 = -i\alpha q\int_{-\infty}^{\bar{t}}|q|^2 d\bar{t} + i\beta q , \tag{2}$$

где введены следующие обозначения:

$$q = C\sqrt{\pi n_2/2n_0} ,$$

C – медленно меняющаяся амплитуда поля E, n_2 характеризует добавку к показателю преломления, пропорциональную $|E|^2$: $n = n_0 + n_2|E|^2$, z и t связаны с продольной координатой z и временем t соотношениями $\bar{z} = -z/\lambda$, $\bar{t} = \left(-2/\lambda\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\right)^{1/2}\left(t - \frac{\partial k}{\partial\omega}z\right)$. Левая часть уравнения (2) совпадает с известным нелинейным уравнением Шредингера; первый член в правой части обусловлен слабым насыщением перехода, коэффициент α характеризует "скорость" насыщения усиливающего перехода, второй член в правой части характеризует усиление в среде, β – коэффициент усиления, учитывающий также и линейные потери. При выводе (2) учтено, что длительность импульса много меньше времени релаксации населенностей, но много больше времени фазовой релаксации усиливающего перехода.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что уравнение (2) имеет решение в виде уединенной волны:

$$q = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\exp\{i[\xi_0 \bar{t} + (\beta^2/\alpha^2 - \xi_0^2)\bar{z}]\}}{\operatorname{ch}\frac{\beta}{\alpha}(\bar{t} - 2\xi_0\bar{z} + \alpha\bar{z})}, \tag{3}$$

где ξ_0 – произвольная константа. Легко видеть, что при $\alpha = \beta = 0$ (3) переходит в односолитонное решение НУШ [1, 2]. Покажем, что в рассматриваемой среде могут формироваться лишь уединенные импульсы вида (3). Будем проводить исследование уравнения (2), когда коэффициенты α и β в правой части малы

$$\alpha \to \epsilon\alpha, \quad \beta \to \epsilon\beta.$$

В этом случае оказывается полезным формализм, аналогичный развитому в работе [4] для исследования возмущения солитонов НУШ. Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$q = \hat{q}(\theta, \zeta, \epsilon) \exp[i\bar{\xi}(\theta - \theta_0) + i(\sigma - \sigma_0)], \tag{4}$$

где

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = -2\xi, \quad \frac{\partial\theta}{\partial \bar{t}} = 1, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial \bar{z}} = \eta^2 + \xi^2, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial \bar{t}} = 0,$$

ξ, η, θ_0 и σ_0 – функции медленной координаты $\zeta = \epsilon\bar{z}$, $\bar{\xi} = \xi + \epsilon(\partial\theta_0/\partial\zeta + \alpha)/2$. Заметим, что при $\epsilon = 0$ и $q = \eta \operatorname{sech}\eta(\theta - \theta_0)$ (4) представляет собой односолитонное решение НУШ с произвольными константами ξ, η, θ_0 и σ_0 [1]. Переходя к новым переменным ζ и θ и вынося малые члены в правую часть, из (2) получим

$$\begin{aligned} -\eta^2\hat{q} + \frac{\partial^2\hat{q}}{\partial\theta^2} + 2\hat{q}|\hat{q}|^2 = \epsilon\Big[&-i\alpha\hat{q}\int_{-\infty}^{\theta}|\hat{q}|^2 d\theta' + i\beta\hat{q} - \\ &- i\frac{\partial\hat{q}}{\partial\zeta} - i(\theta_{0\zeta} + \alpha)\frac{\partial\hat{q}}{\partial\theta} + (\theta - \theta_0)\hat{q}\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\zeta} - \\ &- \hat{q}\Big(\bar{\xi}\theta_{0\zeta} + \sigma_{0\zeta} - \frac{\epsilon}{4}[\theta_{0\zeta} + \alpha]^2\Big)\Big] = \epsilon\hat{F}(\hat{q}). \end{aligned} \tag{5}$$

Мы полагаем, что $\hat{q}$ может быть разложена в ряд по ϵ:

$$\hat{q}(\theta, \zeta, \epsilon) = \hat{q}_0(\theta, \zeta) + \epsilon\hat{q}_1(\theta, \zeta) + \ldots, \tag{6}$$

где $\hat{q}_0 = \eta \operatorname{sech}\eta(\theta - \theta_0)$. Обозначая $\hat{q}_1 = \phi_1 + i\psi_1$ и разделяя в (5) действительные и мнимые части, в первом порядке по ϵ получим

$$\hat{L}\phi_1 = -\eta^2\phi_1 + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial\theta^2} + 6\hat{q}_0\phi_1 = \operatorname{Re}\hat{F}_1 = (\theta - \theta_0)\hat{q}_0\frac{\partial\xi}{\partial\zeta} - (\xi\theta_{0\zeta} + \sigma_{0\zeta})\hat{q}_0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \hat{M}\psi_1 &= -\eta^2\psi_1 + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2} + 2\hat{q}_0^2\psi_1 = \operatorname{Im}\hat{F}_1 = -\alpha\hat{q}_0\int_{-\infty}^{\theta}\hat{q}_0^2 d\theta' + \\ &+ \beta\hat{q}_0 - \hat{q}_{0\zeta} - (\theta_{0\zeta} + \alpha)\hat{q}_{0\theta}. \end{aligned} \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что $\hat{L}$ и $\hat{M}$ – самосопряженные операторы. Воспользовавшись тождествами $\hat{L}\hat{q}_{0\theta} \equiv 0$ и $\hat{M}\hat{q}_0 \equiv 0$, а также учитывая, что ϕ_1 и ψ_1 локализованы по θ, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{q}_{0\theta}\operatorname{Re}\hat{F}_1 d\theta = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\hat{q}_0\operatorname{Im}\hat{F}_1 d\theta = 0. \tag{9}$$

Из первого условия (9) получаем $\partial\xi/\partial\zeta = 0$, а из второго находим зависимость амплитуды

η от ζ :

$$\eta = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\eta_0 e^{2\beta\zeta}}{\eta_0(e^{2\beta\zeta} - 1) + \beta/\alpha} \tag{10}$$

откуда следует, что амплитуда импульса $\eta \to \beta/\alpha$ при $\beta\zeta \to \infty$. Интегрируя уравнения (7) и (8) получаем

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{2\eta}(\xi\theta_{0\zeta} + \sigma_{0\zeta})[1 - \eta(\theta - \theta_0)\operatorname{th}\eta(\theta - \theta_0)]\operatorname{sech}\eta(\theta - \theta_0), \\ \psi_1 &= -\frac{\eta}{2}(\beta - \alpha\eta)(\theta - \theta_0)^2 \operatorname{sech}\eta(\theta - \theta_0). \end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что квазистационарные решения (11) справедливы в области

$$\eta\,|\theta - \theta_0| \ll \min\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(\frac{2\eta}{|\beta - \alpha\eta|}\right)^{1/2}, \quad \frac{1}{\epsilon}\frac{2\eta}{|\xi\theta_{0\zeta} + \sigma_{0\zeta}|}\right). \tag{12}$$

Для определения закона изменения параметра $\xi\theta_{0\zeta} + \sigma_{0\zeta}$ воспользуемся интегралом движения энергии импульса, который может быть получен из уравнения (2):

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\bar{t} = 2\int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\bar{t}\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\bar{t}\right). \tag{13}$$

Подставляя сюда $\hat{q}$ из (6), в первом порядке по ϵ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}_0\phi_1 d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{q}_0\phi_1)\Big|_{\zeta=0} d\theta \frac{\beta^2}{\alpha^2} e^{2\beta\zeta}\left[\eta_0(e^{2\beta\zeta} - 1) + \frac{\beta}{\alpha}\right]^{-2}, \tag{14}$$

откуда следует, что

$$\xi\theta_{0\zeta} + \sigma_{0\zeta} = (\xi\theta_{0\zeta} + \sigma_{0\zeta})\Big|_{\zeta=0} \frac{\beta^2}{\alpha^2} e^{2\beta\zeta}\left[\eta_0(e^{2\beta\zeta} - 1) + \frac{\beta}{\alpha}\right]^{-2} \tag{15}$$

с ростом ζ стремится к нулю. Для определения движения параметра воспользуемся зависимостью от ζ поправки к энергии второго порядка по ϵ. Из (13) во втором порядке получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (2\hat{q}_0\phi_2 + \psi_1^2)d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} (2\hat{q}_0\phi_2 + \psi_1^2)\Big|_{\zeta=0} d\theta \exp 2\left(\beta - 2\alpha\int_0^{\zeta}\eta\, d\zeta'\right), \tag{16}$$

где, как следует из (18) во втором порядке, ϕ_2 определяется уравнением

$$\begin{aligned} \hat{L}\phi_2 &= -\eta^2\phi_2 + \frac{\partial^2\phi_2}{\partial\theta^2} + 6\hat{q}_0^2\phi_2 = -2\hat{q}_0(\psi_1^2 + 3\phi_1^2) + \alpha\psi_1\int_{-\infty}^{\theta}\hat{q}_0^2 d\theta' - \beta\psi_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta} + \\ &+ (\theta_{0\zeta} + \alpha)\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} + \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)\hat{q}_0\theta_{0\zeta\zeta} - \hat{q}_0(\theta_{0\zeta}^2 - \alpha^2) = \operatorname{Re}\hat{F}_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Анализ уравнения (17), а также уравнений для $\hat{q}_j$ более высоких порядков, показывает, что квазистационарные решения будут заведомо справедливы в области[1)]

$$\eta\,|\theta - \theta_0| \ll \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\epsilon}.$$

[1)] За пределами этой области, как показывают расчеты,[6], условие квазистационарности решений нарушается. Тем не менее при $\eta\,|\theta - \theta_0| \gtrsim \frac{1}{2}\ln(\epsilon^{-1})$ решение может быть найдено, так как нелинейный член в правой части (5) здесь мал $(2\hat{q}\,|\hat{q}|^2 \lesssim \epsilon)$ и может рассматриваться как возмущение.

При больших ζ в правой части (17) можно пренебречь членами, пропорциональными ψ_1 и ϕ_1. Проводя в (17) интегрирование и подставляя ϕ_2 в (16), получаем

$$\theta_{0\zeta}^2 - \alpha^2 = (\theta_{0\zeta}^2 - \alpha^2)\Big|_{\beta\zeta_0 \gg 1} \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} e^{2\beta\zeta} \left| \eta_0 (e^{2\beta\zeta} - 1) + \frac{\beta}{\alpha} \right|^{-2} , \tag{18}$$

откуда следует, что $\theta_{0\zeta} \to \pm\alpha$ при $\beta\zeta \to \infty$. Замечая, что $\theta_{0\zeta}$ обусловливает добавку к скорости распространения импульса, получаем, что существуют два значения скорости распространения уединенного импульса (для данного ξ):

$$V_{\pm}^{-1} = k' - \xi\sqrt{-\frac{2k''}{\lambda}} \pm \alpha\epsilon\sqrt{-\frac{k''\lambda}{2}} = V_c \pm \alpha\epsilon\sqrt{-\frac{k''\lambda}{2}} ,$$

каждое из которых может устанавливаться в зависимости от начального значения $\theta_{0\zeta}(\zeta_0)$.

Таким образом мы получаем, что при больших $\beta\zeta$ поправки ϕ_1, ψ_1, как и поправки высших порядков (см. (10), (15), (18)) стремятся к нулю, $\eta \to \beta/\alpha$ и произвольное распределение типа (4) переходит в уединенный импульс (3). Следовательно в среде действительно формируется уединенный секанс–импульс (3). Оценки, выполненные для типичных параметров одномодовых волоконных световодов, активированных ионами Nd^{3+} с плотностью инверсии ионов, равной 10^{19} см$^{-3}$, показывают, что при коэффициенте усиления, лежащем в пределах $0{,}27 \cdot 10^{-3} \div 0{,}54 \cdot 10^{-3}$ см$^{-1}$, плотность энергии уединенного импульса (3) (в зависимости от коэффициента усиления) лежит в области от 0,34 до 0,68 мДж/см^2 а диапазон изменения длительности импульса τ_s соответственно составляет $\tau_s = 2\alpha\beta^{-1} \times (-k''\lambda/2)^{-1/2} \approx 2 \div 20$ пс.

Автор выражает благодарность А.М.Прохорову за интерес и полезные обсуждения результатов работы, а также И.Н.Сисакяну и А.Б.Шварцбургу за поддержку работы.

Литература

1. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* ЖЭТФ, 1971, **34**, 61; ЖЭТФ, 1973, **64**, 1627.
2. *Hasegawa A., Tappert F.* Appl. Phys. Lett., 1973, **23**, 142.
3. *Mollenauer L.F., Stolen at al.* Phys. Rev. Lett., 1980, **45**, 1095.
4. *Kodama Y., Ablowitz M.* Stud. Appl. Math., 1981, **64**, 225.
5. *Файн В.М.* Квантовая радиофизика, т. 1, Фотоны и нелинейные среды., 1972, М.: Советское радио.
6. *Григорьян В.С.* Квантовая электроника, 1986, в печати.

НИИ ФКС при ереванском
государственном университете

Поступила в редакцию
2 апреля 1986 г.