Письма в ЖЭТФ, том 44, вып. 11, стр. 484 – 488 *10 декабря 1986 г.*

ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЕЗМАССОВЫХ ПОЛЕЙ ВЫСШИХ СПИНОВ ($s > 2$)

М.А.Васильев, Е.С.Фрадкин

Показано, что, вопреки общепринятой точке зрения, непротиворечивое гравитационное взаимодействие безмассовых полей высших спинов $s > 2$ существует по крайней мере в первом нетривиальном порядке. Принципиально новой чертой гравитационного взаимодействия высших спинов является его неаналитичность по космологической постоянной.

Одной из важных проблем теории поля является проблема введения непротиворечивого гравитационного взаимодействия безмассовых полей высших спинов $s > 2$. Попытки ее решения были предприняты [1, 2] вскоре после создания супергравитации [3 – 5], решившей аналогичную проблему для спина 3/2. Они стимулировались надеждой, что это, во-первых, позволит преодолеть известный барьер $N \leqslant 8$ в расширенной супергравитации, что необходимо для получения реалистического спектра частиц низших спинов в рамках теорий типа чистой супергравитации, и, во-вторых, приведет к дальнейшим сокращениям расходимостей в квантовой гравитации за счет калибровочных симметрий высших спинов.

Хорошо известно, что все четырехмерные безмассовые поля со спинами $s \geqslant 1$ являются калибровочными и в отсутствие взаимодействия допускают последовательное описание как в плоском [6 – 12], так и в анти-де ситтеровском пространстве [13 – 15]. Однако в [1, 2] было показано, что введение гравитационного взаимодействия безмассовых полей со спинами $s > 2$ путем ковариантизации свободного действия в плоском пространстве оказывается непоследовательным, так как приводит к нарушению калибровочных симметрий высших спинов. Мы покажем, что, в действительности, непротиворечивое гравитационное взаимодействие безмассовых высших спинов существует по крайней мере в первом нетривиальном порядке, т. е. в том самом порядке, в котором проводился анализ в [1, 2]. Ключевой факт состоит в том, что гравитационное взаимодействие безмассовых высших спинов оказывается неаналитичным по космологической постоянной и не допускает разложения над плоским фоном, использовавшегося в [1, 2].

Мы будем существенно опираться на работы [11, 15, 16], в которых была предложена новая форма описания свободных безмассовых полей высших спинов в плоском [11] и анти-де ситтеровском [15] пространстве, а также построена $N = 1$ супералгебра высших спинов [16] (для полуцелых спинов результаты, аналогичные результатам работы [11], были независимо получены в [12]). Следуя [11, 15], мы сопоставим безмассовому полю спина $s > 1$ систему полей[1)] $\omega_{\nu,\alpha(n),\dot\beta(m)}$ с $n + m = 2(s-1)$ (для полей $\omega_{\nu,\alpha(n),\dot\beta(m)}$ часто будет использоваться обозначение $\omega(n, m)$). $N = 1$ супералгебра высших спинов [16] порождает все спины $s > 1$ (каждый спин встречается однократно). Отвечающие ей кривизны и инфинитезимальные калибровочные преобразования с параметрами ϵ имеют вид

$$R_{\nu\mu,\alpha(n),\dot\beta(m)} = \partial_\nu \omega_{\mu,\alpha(n),\dot\beta(m)} - \partial_\mu \omega_{\nu,\alpha(n),\dot\beta(m)} +$$

$$+ \sum_{p,q,s,k,l,t=0}^{\infty} i^{s+t-1} \frac{n!\,m!}{p!\,q!\,s!\,k!\,l!\,t!} \delta(n-p-q)\delta(m-k-l) \times$$

---

1) Используются следующие правила обращения с индексами [15]. Индексы $\alpha, \beta, \gamma \ldots = 1, 2$; $\dot\alpha, \dot\beta, \dot\gamma \ldots = 1, 2$ являются спинорными. Индексы компонент дифференциальных форм $\nu, \mu, \rho \ldots = 0 - 3$. По спинорным индексам, обозначенным одной буквой, производится сначала полная симметризация отдельно по верхним и нижним индексам, а затем свертка максимально возможного числа нижних и верхних индексов, обозначенных одной буквой. Число индексов указывается в скобках (исключая случай одного индекса).

$$\times \lambda^{1+\frac{1}{2}(|n-m|-|p+s-k-t|-|q+s-l-t|)} \delta(|(p+k)(q+l)+(p+k)(s+t)+(q+l)(s+t)+1|_2) \times$$

$$\times \omega_{\nu,\alpha(p)\gamma(s),\dot\beta(k)\dot\delta(t)}\, \omega_{\mu,\alpha(q)}{}^{\gamma(s)}{}_{,\dot\beta(l)}{}^{\dot\delta(t)}, \tag{1}$$

$$\delta\omega_{\nu,\alpha(n),\dot\beta(m)} = \partial_\nu \epsilon_{\alpha(n),\dot\beta(m)} +$$

$$+ \sum_{p,q,s,k,l,t=0}^{\infty} i^{s+t-1} \frac{n!\,m!}{p!\,q!\,s!\,k!\,l!\,t!} \delta(n-p-q)\,\delta(m-k-l) \times$$

$$\times \lambda^{1+\frac{1}{2}(|n-m|-|p+s-k-t|-|q+s-l-t|)} \delta(|(p+k)(q+l)+(p+k)(s+t)+(q+l)(s+t)+1|_2) \times$$

$$\times \omega_{\nu,\alpha(p)\gamma(s),\dot\beta(k)\dot\delta(t)}\, \epsilon_{\alpha(q)}{}^{\gamma(s)}{}_{,\dot\beta(l)}{}^{\dot\delta(t)}. \tag{2}$$

Используются следующие обозначения

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 \text{ при } n=0 \\ 0 \text{ при } n\neq 0, \end{cases} \quad \theta(n) = \begin{cases} 1 \text{ при } n \geqslant 0 \\ 0 \text{ при } n < 0, \end{cases} \quad |n|_2 = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 2k+1 \\ 0 \text{ при } n = 2k \end{cases} \tag{3}$$

$$\epsilon(n) = \theta(n) - \theta(-n), \quad |n| = n\theta(n) - n\theta(-n).$$

Калибровочные поля подчинены условиям эрмитовости $(\omega_{\nu,\alpha(n),\dot\beta(m)})^\dagger = \omega_{\nu,\beta(m),\dot\alpha(n)}$, отвечающим супералгебре $\mathrm{sh}s_0(1)$ в обозначениях [16], и считаются (анти) коммутирующими, если число спинорных индексов $n+m$ (не) четно. Параметр λ совпадает с обратным радиусом пространства анти-де Ситтера (космологическая постоянная пропорциональна $-\lambda^2$). Кривизны (1) получаются из кривизн (1.1) работы [16] с помощью перехода к новым полям

$$\omega_{\nu,\alpha(n),\dot\beta(m)} \to \lambda^{1-\frac{1}{2}|n-m|}\, \omega_{\nu,\alpha(n),\dot\beta(m)}. \tag{4}$$

Такой способ введения λ диктуется требованием, чтобы свободная теория и линеаризованные связи (см. ниже) допускали переход к плоскому пределу $\lambda \to 0$ при конечных полях $\omega(n, m)$. Важно, что кривизны (1) содержат λ не только в положительных, но и в отрицательных степенях, что, в конечном счете, и приводит к неаналитичности *взаимодействия* высших спинов по космологической постоянной.

Гравитационные тетрада и связность отождествляются с полями

$$\begin{aligned} \omega_{\nu,\alpha(1),\dot\beta(1)} &= h_{\nu\alpha\dot\beta} + \omega'_{\nu,\alpha(1),\dot\beta(1)}, \\ \omega_{\nu,\alpha(2),\dot\beta(0)} &= w_{\nu\alpha(2)} + \omega'_{\nu,\alpha(2),\dot\beta(0)}, \\ \omega_{\nu,\alpha(0),\dot\beta(2)} &= \overline{w}_{\nu\dot\beta(2)} + \omega'_{\nu,\alpha(0),\dot\beta(2)}, \end{aligned} \tag{5}$$

где предполагается, что фоновая тетрада h и связность w, $\overline{w}$ имеют нулевой порядок малости. Отклонения ω' гравитационных полей от фоновых и все поля $\omega(n, m)$ с $n + m \neq 2$ предполагаются имеющими первый порядок малости. Фоновые поля выбираются так, чтобы отвечающие им кривизны нулевого порядка ($sp(4)$-кривизны), которые имеют вид

$$r_{\nu\mu,\alpha(2)} = \partial_\nu w_{\mu\alpha(2)} + w_{\nu\alpha\gamma} w_{\mu\alpha}{}^{\gamma} + \lambda^2 h_{\nu\alpha\dot\delta} h_{\mu\alpha}{}^{\dot\delta} - (\nu \longleftrightarrow \mu), \tag{6}$$

$$r_{\nu\mu,\alpha\dot\beta} = \partial_\nu h_{\mu\alpha\dot\beta} + w_{\nu\alpha\gamma} h_{\mu}{}^{\gamma}{}_{\dot\beta} + \overline{w}_{\nu\dot\beta\dot\delta} h_{\mu\alpha}{}^{\dot\delta} - (\nu \longleftrightarrow \mu) \tag{7}$$

$(\bar{r}_{\nu\mu,\dot\beta(2)} = (r_{\nu\mu,\beta(2)})^{\dagger})$, обращались в ноль. Это означает, что кривизны (1) имеют разложение $R = R^l + O((\omega^{(\prime)})^2)$, где линеаризованные кривизны R^l имеют первый порядок малости, а $O((\omega^{(\prime)})^2)$ обозначает члены второго порядка.

Для описания динамики высших спинов мы будем использовать следующее явно общекоординатно инвариантное действие[2)]

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n+m>0} i^{n+m+1} \frac{1}{n!\,m!} \beta(n+m) \in (n-m) \lambda^{-|n-m|} \times$$

$$\times \int d^4x \in^{\nu\mu\rho\sigma} R_{\nu\mu,\alpha(n),\dot\beta(m)} R_{\rho\sigma,}{}^{\alpha(n)}{}_{,}{}^{\dot\beta(m)} , \tag{8}$$

являющееся прямым обобщением действия свободных безмассовых высших спинов в пространстве де Ситтера, предложенного в [15] (если в (8) заменить кривизны R на R^l, то S переходит в сумму свободных действий для всех спинов $s > 1$; $\beta(2(s-1))$ – нормировочный коэффициент для свободного действия спина s). Важным свойством действия (8) является то, что в квадратичном приближении его вариация по всем "лишним" полям $\omega(n, m)$ с $|n-m| > 2$ тождественно равна нулю [15]. В результате, свободные высшие спины описываются только "динамическими" полями $\omega(n, m)$ с $|n-m| \leqslant 2$. Однако при включении взаимодействия, вариация действия (8) по лишним полям оказывается отличной от нуля [16], что препятствует его разумной интерпретации, если считать лишние поля независимыми динамическими переменными. Выход состоит в том, чтобы с самого начала выразить все лишние поля через динамические с помощью некоторых связей. В [15] были предложены связи, позволяющие это сделать на линеаризованном уровне и имеющие вид[3)]

$$\in^{\nu\mu\rho\sigma} R^l{}_{\nu\mu,\alpha(n),\dot\beta(m-1)\dot\delta}\, h_{\rho\alpha}{}^{\dot\delta} = 0 \quad \text{при} \quad n \geqslant m > 0, \tag{9}$$

$$\in^{\nu\mu\rho\sigma} R^l{}_{\nu\mu,\alpha(n-1)\gamma,\dot\beta(m)}\, h_{\rho}{}^{\gamma}{}_{\dot\beta} = 0 \quad \text{при} \quad m \geqslant n > 0. \tag{10}$$

Замечательно, что, как будет показано ниже, уже линеаризованных связей (9) и (10) оказывается достаточно для доказательства инвариантности действия (8) в кубическом приближении.

Лишние поля входят в (8) только в нелинейных комбинациях типа $R^l\omega\omega$, и поэтому в кубическом приближении достаточно знать их линеаризованные выражения. Так как в вариации действия нас интересуют лишь члены типа $R^l\omega\epsilon$, законы преобразований лишних полей достаточно знать только в нулевом порядке. Поскольку связи (9), (10) пропорциональны кривизнам, вариация этих связей при калибровочных преобразованиях (2) имеет по крайней мере первый порядок малости. Соответственно, деформированные законы преобразований лишних полей, диктуемые требованием инвариантности связей, отличаются от (2) лишь начиная с первого порядка. Тем самым, в рассматриваемом приближении мы можем использовать преобразования (2) и связи (9), (10), забывая об неинвариантности последних[4)].

---

2) Действие (8) является обобщением действия Макдоуэла – Мансоури [17] для (супер) гравитации с космологическим членом: часть действия (8), зависящая только от полей $\omega(n, m)$ с $n+m = 2$ $(1 \leqslant n+m \leqslant 2)$ совпадает с действием чистой гравитации ($N = 1$ супергравитации при $\beta(1) = \beta(2)$).

3) При $n = m$ связи (9), (10) совпадают с линеаризованными (алгебраическими) уравнениями движения вспомогательных полей [15] $\omega(n, m)$ с $|n-m| = 2$ аналогичных гравитационной лоренцевой связности. Лишние поля исключаются соотношениями (9), (10) при $n \neq m$.

4) Учет деформации преобразований физических полей, обсуждаемой ниже, не влияет на этот вывод. Кроме того, используя аргументы в духе "формализма порядка 1,5" [18,19], легко понять, что модификация закона преобразований вспомогательных полей $\omega(n, m)$ с $|n-m| = 2$ также несущественна в рассматриваемом приближении.

После решения связей (9), (10) все поля $\omega(n, m)$ с $|n-m|>1$ выражаются через физические поля $\omega(n, m)$ с $|n-m|\leqslant 1$ с точностью до чисто калибровочной части, отвечающей линеаризованным преобразованиям (2) (явные выражения приведены в [15]). Степень старших производных физических полей, содержащихся в $\omega(n, m)$, равна $\frac{1}{2}(|n-m|-|n-m|_2)$. Тем самым, лишние поля вносят высшие производные во взаимодействие высших спинов и, в том числе, в их взаимодействие с гравитационными кривизнами.

Вариация действия (8) при преобразованиях (2) имеет вид

$$\delta S = \sum_{p,q,s,k,l,t=0}^{\infty} i^{p+q+s+k+l+t} \frac{1}{p!q!s!k!l!t!} \times$$

$$\times \lambda^{1-\frac{1}{2}(|p+q-k-l|+|p+s-k-t|+|q+s-l-t|)} \times$$

$$\times \delta(|(p+k)(q+l)+(p+k)(s+t)+(q+l)(s+t)+1|_2) \times$$

$$\times (\beta(p+q+k+l)\in(p+q-k-l)-\beta(p+s+k+t)\in(p+s-k-t)) \times$$

$$\times \int d^4x \epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} R_{\nu\mu,\alpha(p+q),\dot\beta(k+l)} R_{\rho\sigma,}{}^{\alpha(p)}{}_{\gamma(s),}{}^{\dot\beta(k)}{}_{\dot\delta(t)} \epsilon^{\alpha(q)\gamma(s),}{}_{\dot\beta(l)\dot\delta(t)} \tag{11}$$

Мы покажем, что при специальном выборе коэффициентов $\beta(n)$ вариация (11) обращается в ноль на связях (9), (10) и свободных уравнениях движения физических полей. Ключевым пунктом доказательства будет следующее утверждение, доказанное в [15]: если выполнены связи (9), (10), то линеаризованные кривизны R^l могут быть приведены к виду

$$R^l{}_{\nu\mu,\alpha(n),\dot\beta(m)} = \frac{i}{4}[\delta(m)h_\nu{}^\gamma{}_{\dot\delta} h_\mu{}^{\gamma\dot\delta} C_{\alpha(n)\gamma(2)} - \delta(n) h_{\nu\gamma}{}^{\dot\delta} h_\mu{}^{\gamma\dot\delta} \bar{C}_{\dot\beta(m)\dot\delta(2)}] + O\left(\frac{\delta S^2}{\delta\omega^p}\right), \tag{12}$$

где

$$C_{\alpha(n+2)} = \frac{1}{4h}\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} h_{\nu\alpha\dot\delta} h_{\mu\alpha}{}^{\dot\delta} R^l{}_{\rho\sigma,\alpha(n),\dot\beta(0)},$$

$$\bar{C}_{\dot\beta(m+2)} = \frac{1}{4h}\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} h_{\nu\gamma\dot\beta} h_\mu{}^\gamma{}_{\dot\beta} R^l{}_{\rho\sigma,\alpha(0),\dot\beta(m)}, \tag{13}$$

$h = \det|h_\nu{}^{\alpha\dot\beta}|$ и $O(\delta S^2/\delta\omega^p)$ обозначает члены пропорциональные вариации свободного действия высших спинов по физическим полям $\omega(n, m)$ с $|n-m|\leqslant 1$.

Из (12) ясно, что необходимо найти также коэффициенты $\beta(n)$, при которых в (11) отсутствуют члены типа $C\times C$, $\bar{C}\times\bar{C}$ и $C\times\bar{C}$. Используя простое тождество $\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} h_\nu{}^\alpha{}_{\dot\delta} \times h_\mu{}^{\alpha\dot\delta} h_\rho{}_\gamma{}^{\dot\beta} h_\sigma{}^{\gamma\dot\beta} = 0$, легко видеть, что члены $C\times\bar{C}$ отсутствуют при произвольных $\beta(n)$. Члены $C\times C$ и $\bar{C}\times\bar{C}$ отсутствуют тогда и только тогда, когда в (11) отсутствуют члены, содержащие обе кривизны только с точечными или только с неточечными индексами, т. е. если

$$\delta(|pq+ps+qs+1|_2)[\beta(p+q)\theta(p+q-1) - \beta(p+s)\theta(p+s-1)] = 0 \tag{14}$$

при произвольных $p, q, s \geqslant 0$. Общее решение (14) имеет вид $\beta(n) = \text{const} = \beta$ при $n>0$, где выбор константы диктуется нормировкой гравитационного действия. В этом случае вариация (11) пропорциональна $\delta S^2/\delta\omega^p$ и, следовательно, найдутся такие модифицированные преобразования физических полей $\delta'\omega^p = \delta\omega^p + \Delta\omega^p$, которые оставляют инвариантным действие (8) в рассматриваемом приближении ($\delta\omega^p$ задано в (2), а $\Delta\omega^p$ имеет структуру $R^l\times\epsilon$).

Таким образом, действие (8) при $\beta(n) = \beta$, дополненное связями (9), (10), непротиворечиво описывает динамику всех безмассовых полей со спинами $s \geqslant 3/2$ в кубическом приближении. Поле спина 2 является гравитационным полем. Теория содержит только две независимых константы – гравитационную постоянную и космологическую постоянную.

Литература

1. *Aragone C., Deser S.* Phys. Lett., 1979, **86B**, 161.
2. *Berends F.A., van Holten J.W., van Nieuwenhuizen P., de Wit B.* J. Phys., 1980, **A13**, 1643.
3. *Freedman D.Z., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S.* Phys. Rev., 1976, **D13**, 3214; *Freedman D.Z., van Nieuwenhuizen P.* Phys. Rev., 1976, **D14**, 912.
4. *Deser S., Zumino B.* Phys. Lett., 1976, **62B**, 335.
5. *van Nieuwenhuizen P.* Phys. Rep., 1981, **68**, 189.
6. *Швингер Ю.* Частицы, источники, поля. М.: Мир, 1973.
7. *Fronsdal C.* Phys. Rev., 1978, **D18**, 3624.
8. *Fang J., Fronsdal C.* Phys. Rev., 1978, **D18**, 3630.
9. *Berends F.A., van Holten J.W., van Nieuwenhuizen P., de Wit B.* Phys. Lett., 1979, **83B**, 188; Nucl. Phys., 1979, **B154**, 261.
10. *de Wit B., Freedman D.Z.* Phys. Rev., 1980, **D21**, 358.
11. *Васильев М.А.* ЯФ, 1980, **32**, 855.
12. *Aragone C., Deser S.* Nucl. Phys., 1980, **D170**, (FS1), 329.
13. *Fronsdal C.* Phys. Rev., 1979, **D20**, 848.
14. *Fang J., Fronsdal C.* Phys. Rev., 1980, **D22**, 1361.
15. *Vasiliev M.A.* Lebedev Institute preprint, 1986, №233.
16. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* Lebedev Institute preprints, 1986, №№257, 258; (см. также ДАН СССР, 1986, **291**, 1100).
17. *MacDowell S.W., Mansouri F.* Phys. Rev. Lett., 1977, **38**, 739.
18. *Chamseddine A.H., West P.C.* Nucl. Phys., 1977, **B129**, 39.
19. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* Lebedev Institute preprint, 1976, №197.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
22 октября 1986 г.